

***WISKUNDE***  
***voor alle vwo-niveaus***  
***Update 2025***

*Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening*

*Vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen*

*Dynamische modellen-logica-perspectief-*

*Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen*

### ***Bij deze vernieuwde uitgave***

Dit boek is een herziening van de voorgaande uitgave van 'Wiskunde voor alle vwo-niveaus' UPDATE 2024. Meer gedateerde stof is weggelaten, figuren, teksten en uitwerkingen van opgaven, zijn hier en daar verbeterd of aangevuld.

Ook zijn meer examenopgaven en uitwerkingen uit recente 'Examenbundels' opgenomen. De steeds geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn in hoofdzaak bedoeld ter ondersteuning van de direct daaraan voorafgaande theorie. Hun aantal is zo beperkt mogelijk gehouden zodat u zich in betrekkelijk korte tijd veel stof (weer) kunt 'eigen maken' zonder misschien gedemotiveerd te raken omdat '*Het allemaal niet opschiet*' wegens de grote hoeveelheden oefenopgaven zoals die in gangbare lesmethoden noodzakelijk zijn vanwege de concentrische opbouw van de leerstof in de opeenvolgende leerjaren.

Elk hoofdstuk wordt als *volledig geheel* op eind-vwo-niveau behandeld, dus niet volgens de structurele, concentrische opbouw van de bekende onderwijsspecialist professor Herbarts. Omdat ik niet mag veronderstellen dat u alle behandelde formules, eigenschappen en regels steeds kunt onthouden, zult u regelmatig het kopje 'ONTHOUD' tegenkomen, bedoeld om de direct erop volgende theorie beter te kunnen volgen. In latere hoofdstukken van het boek zal voor het gemak via opgegeven paginanummers worden verwezen naar toepasselijke, eerder behandelde stof. Beide methoden om u de stof misschien gemakkelijker te kunnen eigen maken, zijn geheel naar eigen idee gedaan en voor u misschien overbodig.

Door de opzet van het boek en een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, kunnen de voor u interessante onderdelen, ook naar de exameneisen bij uw profiel, snel worden gevonden. Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) wordt, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen eerder voor de TI-83 van Texas Instruments, die vrijwel identiek is met de latere, en soms iets handzamer TI-84. De nieuwste GR van Casio is overigens naar mijn mening gemakkelijker in het gebruik.

Ik hoop dat ook deze uitgave aan de verwachtingen voldoet en houd mij voor opbouwende kritiek graag aanbevolen.

### ***Over de schrijver***



Wim Gronloh begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij en was na negen jaar vaartijd ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde in het lager- en middelbaar technisch en voortgezet onderwijs. Doceerde sinds 1980 ook informatica. Publiceerde in 1997 de wiskundemethode 'Basislijn' voor lbo-mavo en havo-vwo waarvan in 2023 een vernieuwde versie werd uitgegeven. Sedert 2006 verschenen van zijn hand regelmatig geüpdatete wiskundeboeken voor het vwo.

.Bussum, winter 2025

**Inhoud**

|                                                        |       |
|--------------------------------------------------------|-------|
| I. FUNCTIES, GRAFIEKEN, EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN       | 1- 44 |
| 1. Het begrip functie                                  | 1     |
| 2. Lineaire functies                                   | 2     |
| 3. Kwadratische functies                               | 5     |
| a. Nulpunten van een kwadratische functie              | 7     |
| b. Ontbinden van kwadratische functies                 | 8     |
| 4. Machtsfuncties                                      | 10    |
| a. Grafieken van machtsfuncties                        | 12    |
| b. Transformaties                                      | 12    |
| - Transformaties door translatie                       | 14    |
| - Transformaties door vermenigvuldiging                | 14    |
| - Transformaties van wortelvormen                      | 15    |
| 5. Exponentiële functies                               | 16    |
| - Exponentiële groei                                   | 17    |
| 6. Gebroken rationale functies                         | 19    |
| 7. Asymptoten                                          | 19    |
| 8. Logaritmische functies                              | 22    |
| a. Logaritme van een getal                             | 22    |
| b. Eigenschappen van logaritmen                        | 23    |
| c. Inverse functies                                    | 23    |
| 9. Goniometrische functies                             | 25    |
| a. Definities in de eenheidscirkel                     | 25    |
| b. De eenheid radiaal                                  | 26    |
| c. Herleidingformules                                  | 26    |
| - sinus en cosinus van som en verschil                 | 27    |
| - verdubbeling- en halveringsformules                  | 28    |
| - formules van Simpson                                 | 28    |
| d. Exacte waarden cirkel van de standaardhoeken        | 29    |
| e. Sinus- en cosinusregel                              | 29    |
| - sinusregel                                           | 29    |
| - cosinusregel ('Uitgebreide stelling van Pythagoras') | 29    |
| 10. Periodieke functies                                | 33    |
| a. Sinusfunctie                                        | 33    |
| b. Cosinusfunctie                                      | 34    |
| c. Tangensfunctie                                      | 35    |
| d. Sinusoïden                                          | 37    |
| 11. Limieten en continuïteit van functies              | 39    |
| a. Continuïteit van een functie                        | 39    |
| b. Perforaties van functies                            | 40    |

## IV

|                                                        |            |
|--------------------------------------------------------|------------|
| c. Rekenregels voor limieten                           | 41         |
| d. Rechter- en linkerlimieten                          | 41         |
| e. Existentie van limieten                             | 41         |
| <br>II. OPLOSSEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN   | <br>45- 63 |
| 1. Gelijkheden en ongelijkheden                        | 46         |
| 2. Oplossen van vergelijkingen                         | 48         |
| a. Lineaire stelsels                                   | 48         |
| b. Tweedegraads vergelijkingen                         | 50         |
| - ontbinden in factoren                                | 50         |
| - kwadraatafsplitsing                                  | 51         |
| - de $abc$ -formule                                    | 51         |
| c. Hogeregraads vergelijkingen                         | 52         |
| - de vergelijking $x^3 = 1$                            | 52         |
| - de vergelijking $x^3 = -1$                           | 53         |
| d. Exponentiële vergelijkingen                         | 53         |
| e. Logaritmische vergelijkingen                        | 55         |
| f. Logaritmische ongelijkheden                         | 56         |
| g. Goniometrische vergelijkingen                       | 58         |
| - $\sin A = p, \cos A = p$                             | 58         |
| - $\sin A = \sin B, \cos A = \cos B$                   | 59,60      |
| - $\sin A = \cos B$ of $\cos A = \sin B$               | 60         |
| h. Parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen  | 61         |
| <br>III. DIFFERENTIËREN EN AFGELEIDE FUNCTIES          | <br>64-78  |
| 1. Groeisnelheid                                       | 64         |
| 2. Differentiaalquotiënt en afgeleide functie          | 65         |
| 3. Differentieerbaarheid en continuïteit               | 66         |
| 4. Kenmerken van functies via hun afgeleiden           | 67         |
| a. Stijgende en dalende functies                       | 68         |
| b. Convexe en concave kromming                         | 68         |
| c. Extreme waarden                                     | 68         |
| - voorwaarden voor een lokaal extreem                  | 69         |
| d. Buigpunten                                          | 69         |
| 5. Regels bij het differentiëren                       | 71         |
| a. Factorregel                                         | 71         |
| b. Somregel                                            | 71         |
| c. Productregel                                        | 72         |
| d. Quotiëntregel                                       | 72         |
| 6. Afgeleiden van elementaire functies                 | 73         |
| a. Afgeleide van een machtsfunctie                     | 73         |
| b. Afgeleiden van goniometrische functies              | 74         |
| - afgeleide van sinus $x$ , cosinus $x$ en tangens $x$ | 75         |

|                                                           |             |
|-----------------------------------------------------------|-------------|
| c. Afgeleiden van $e$ -machten                            | 76          |
| d. De kettingregel                                        | 76          |
| e. Afgeleiden van exponentiële- en logaritmische functies | 77          |
| - exponentiële functies                                   | 77          |
| - logaritmische functies                                  | 78          |
| f. Afgeleiden van samengestelde functies                  | 79          |
| 7. Praktische toepassingen van differentiëren             | 80          |
| <br>IV. INTEGREREN EN PRIMITIEVE FUNCTIES                 | <br>82- 98  |
| 1. Oppervlakte en integraal                               | 82          |
| 2. Integreren en stamprimitieven                          | 84          |
| a. Integreren                                             | 84          |
| b. Stamprimitieven                                        | 85          |
| c. Rekenregels bij het integreren                         | 86          |
| d. Bepaalde- en onbepaalde integralen                     | 88          |
| 3. Substitutiemethode en partieel integreren              | 90          |
| a. Substitutiemethode                                     | 88          |
| b.. Partiële integratie                                   | 89          |
| 4. Toepassingen in de meetkunde                           | 90          |
| a. Lengte van een kromme                                  | 91          |
| b. Oppervlakte tussen twee krommen                        | 91          |
| c. Inhoud van een omwentelingslichaam                     | 92          |
| - inhoud van een cilinder                                 | 92          |
| - inhoud van een kegel                                    | 92          |
| - inhoud van een bol                                      | 93          |
| -inhoud van een omwentelingsellipsoïde                    | 93          |
| d. Oppervlakte van een omwentelingslichaam                | 96          |
| - oppervlakte van een bol                                 | 97          |
| -                                                         |             |
| <br>V. COMBINATORIEK EN KANSREKENING                      | <br>99- 116 |
| 1. Driehoek van Pascal                                    | 99          |
| - Binomium van Newton                                     | 101         |
| - Routes in een rooster                                   | 102         |
| 2. Kansexperimenten                                       | 103         |
| a. Somregel                                               | 103         |
| b. Productregel                                           | 103         |
| c. Complementregel                                        | 104         |
| 3. Permutaties, variaties en combinaties                  | 105         |
| a. Permutaties                                            | 105         |
| b. Variaties                                              | 105         |
| c. Combinaties                                            | 106         |

## VI

|                                                   |              |
|---------------------------------------------------|--------------|
| 4. Onderscheid bij kansproblemen                  | 107          |
| a. Trekkingen zonder terugleggen                  | 107          |
| b. Trekkingen met terugleggen                     | 108          |
| c. Binomiale kansverdelingen                      | 109          |
| 5. Verwachtingswaarden                            | 112          |
| <br>VI. STATISTIEK EN KANSREKENING                | <br>117- 140 |
| 1. Centrummaten                                   | 117          |
| a. Gemiddelde                                     | 117          |
| b. Modus                                          | 117          |
| c. Mediaan                                        | 117          |
| d. Kwartielsafstand, spreidingsbreedte en boxplot | 118          |
| 2. Klassenindelingen                              | 118          |
| a. Klassenmidden                                  | 118          |
| b. Modale klasse en klassenmediaan                | 119          |
| 3. Frequentiepolygonen                            | 119          |
| a. Cumulatieve frequenties                        | 119          |
| b. Relatieve cumulatieve frequenties              | 120          |
| 4. Beelddiagrammen                                | 121          |
| - geclusterd staafdiagram                         | 121          |
| - histogram                                       | 123          |
| - reepdiagram                                     | 123          |
| - gecombineerd beelddiagram                       | 124          |
| 5. Spreidingsmaten                                | 125          |
| a. Standaardafwijking                             | 126          |
| - berekening van de standaardafwijking            | 126          |
| - betekenis van de standaardafwijking             | 126          |
| - standaardafwijking van een frequentieverdeling  | 127          |
| b. Spreidingsmaten van binomiale kansverdelingen  | 129          |
| - verwachtingswaarde                              | 129          |
| - variantie                                       | 130          |
| - standaardafwijking                              | 130          |
| - de wortel- $n$ wet                              | 130          |
| 6. Normale verdelingen                            | 134          |
| Eigenschappen van de normaalkromme                | 135          |
| a. Berekening van standaardscores                 | 136          |
| b. Standaardiseren                                | 137          |
| <br>VII . PLANIMETRIE                             | <br>141- 172 |
| 1. Driehoeken                                     | 141          |
| a. Stelling van Pythagoras                        | 142          |
| b. Goniometrische verhoudingen                    | 142          |

## VII

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| - Bijzondere lijnstukken in een driehoek      | 143 |
| 1. Zwaartelijnen                              | 143 |
| 2. Bissectrices                               | 143 |
| 3. Hoogtelijnen                               | 145 |
| 4. Middelloodlijnen                           | 145 |
| 5. Rechte van Euler                           | 145 |
| 2. Vierhoeken                                 | 146 |
| - koordenvierhoek                             | 147 |
| 3. Regelmatige veelhoeken                     | 147 |
| a. De ‘Guldensnede’ en het getal $\phi$       | 148 |
| b. Regelmatige tienhoek                       | 149 |
| c. Verdubbelingsformule                       | 150 |
| d. Rij van Fibonacci                          | 151 |
| 4. De cirkel                                  | 151 |
| a. Hoeken in een cirkel                       | 152 |
| - middelpuntshoek                             | 152 |
| - omtrekshoek                                 | 152 |
| - binnenhoek van een cirkel                   | 153 |
| - buitenhoek van een cirkel                   | 153 |
| - hoek tussen een koorde en een raaklijn      | 154 |
| b. Cirkels om, in, en aan een driehoek        | 154 |
| - omgeschreven cirkel                         | 154 |
| - ingeschreven cirkel                         | 155 |
| .                                             |     |
| c. Omtrek van een cirkel                      | 155 |
| - Getal van Archimedes en $\pi$               | 156 |
| d. Oppervlakte van een cirkel                 | 157 |
| e. Meetkundige vraagstukken                   | 158 |
| 5. Kegelsneden                                | 161 |
| a. De cirkel                                  | 162 |
| b. De ellips                                  | 162 |
| c. De parabool                                | 163 |
| d. De hyperbool                               | 165 |
| 6. Transformaties                             | 166 |
| a. Assentransformaties                        | 167 |
| - transformatie door assentranslatie          | 167 |
| - transformatie door assenrotatie             | 167 |
| b. Transformaties door vermenigvuldiging      | 168 |
| - vermenigvuldiging ten opzichte van een punt | 168 |
| - vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn | 169 |
| - oppervlakte van een ellips                  | 170 |
| c. Poolcoördinaten                            | 171 |
| - Spiraal van Archimedes                      | 171 |
| - De Cardioïde                                | 172 |

## VIII

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| VIII. STEREOMETRIE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 173- 188  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Meetkundige lichamen <span style="float: right;">173</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Het prisma <span style="float: right;">173</span></li> <li>b. De piramide <span style="float: right;">173</span></li> <li>c. De cilinder <span style="float: right;">174</span></li> <li>d. De kegel <span style="float: right;">174</span></li> <li>e. De bol <span style="float: right;">174</span></li> </ul> </li> <li>2. Oppervlakte en inhoud van lichamen <span style="float: right;">174</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Oppervlakte van prisma en piramide <span style="float: right;">174</span></li> <li>b. Inhoud van een prisma <span style="float: right;">174</span></li> <li>c. Inhoud en oppervlakte van een cilinder <span style="float: right;">175</span></li> <li>d. Inhoud van een piramide <span style="float: right;">176</span></li> <li>e. Inhoud en oppervlakte van een kegel <span style="float: right;">176</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>- oppervlakte van een afgeknotte kegel <span style="float: right;">177</span></li> </ul> </li> <li>f. Inhoud van een bol naar Archimedes <span style="float: right;">178</span></li> </ul> </li> <li>3. Oppervlakte en inhoud van boldelen <span style="float: right;">179</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Bolsegment <span style="float: right;">179</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Inhoud en oppervlakte van een bolsegment <span style="float: right;">179</span></li> </ul> </li> </ul> </li> <li>4. Regelmatige en halfregelmatige vlakvullingen en <span style="float: right;">181</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Regelmatige patronen <span style="float: right;">181</span></li> <li>b. Halfregelmatige patronen <span style="float: right;">182</span></li> </ul> </li> <li>5. Veelvlakken <span style="float: right;">182</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Platonische veelvlakken <span style="float: right;">183</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>- dualiteit van veelvlakken <span style="float: right;">184</span></li> <li>- dualiteit van kubus en octaëder <span style="float: right;">185</span></li> </ul> </li> <li>b. Archimedische veelvlakken <span style="float: right;">185</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Mogelijke configuraties <span style="float: right;">185</span></li> <li>- Knooppunten van de derde orde <span style="float: right;">186</span></li> <li>- Knooppunten van de vierde orde <span style="float: right;">187</span></li> <li>- Knooppunten van de vijfde orde <span style="float: right;">187</span></li> </ul> </li> </ul> </li> </ul> |           |
| IX. VECTORALGEBRA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 189 - 214 |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>1. Het begrip vector <span style="float: right;">189</span></li> <li>2. Basisbewerkingen van vectoren <span style="float: right;">190</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Meetkundige som en verschil van twee vectoren <span style="float: right;">190</span></li> <li>b. Meetkundig scalair product <span style="float: right;">190</span></li> </ul> </li> <li>3. Vectorcoördinaten en kentallen <span style="float: right;">191</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Plaatsvectoren in het platte vlak <span style="float: right;">191</span></li> <li>b. Vectoren in de driedimensionale ruimte <span style="float: right;">192</span></li> </ul> </li> <li>4. Algebraïsche bewerkingen van vectoren <span style="float: right;">192</span> <ul style="list-style-type: none"> <li>a. De lengte van een vector <span style="float: right;">193</span></li> <li>b. Algebraïsche som van twee vectoren <span style="float: right;">193</span></li> <li>c. Algebraïsch scalair product <span style="float: right;">194</span></li> </ul> </li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |           |

## IX

|                                                 |          |
|-------------------------------------------------|----------|
| 5. Inwendig product van twee vectoren           | 192      |
| 6. Meetkunde met vectoren                       | 197      |
| 7. Vectorvoorstellingen en vectorvergelijkingen | 199      |
| a. Vectorvoorstelling van een punt              | 199      |
| b. Vectorvergelijking van een lijn              | 199      |
| c. Normaalvergelijking van een lijn             | 200      |
| d. Vectorvergelijking van een vlak              | 201      |
| e. Normaalvergelijking van een vlak             | 201      |
| 8. Hoeken en afstanden                          | 203      |
| a. Vectorrotaties over $90^\circ$               | 203      |
| b. Hoek tussen twee lijnen                      | 203      |
| c. Afstanden van punten en lijnen               | 204      |
| 9. Vectorproducten en determinanten             | 204      |
| a. Uitwendig product en blokproduct             | 204      |
| - Eigenschappen van het uitproduct              | 205      |
| - Kentallen van het uitproduct                  | 206      |
| b. Determinanten                                | 209      |
| - Regel van Sarrus                              | 209      |
| - Rekenregels voor vierkante determinanten      | 210      |
| c. Uitproduct en blokproduct als determinanten  | 213      |
| - Het uitproduct                                | 213      |
| - Het blokproduct                               | 213      |
| X. ANALYTISCHE MEETKUNDE MET VECTOREN           | 215-224  |
| 1. Afstanden in vectorruimten                   | 215      |
| a. Afstand van een punt tot een lijn            | 215      |
| b. Afstand tussen twee evenwijdige lijnen       | 216      |
| c. Afstand tussen twee elkaar kruisende lijnen  | 216      |
| d. Afstand van een punt tot een vlak            | 217      |
| 2. Hoeken tussen lijnen en vlakken              | 218      |
| a. Hoek tussen twee lijnen                      | 218      |
| b. Hoek tussen een lijn en een vlak             | 219      |
| c. Hoek tussen twee elkaar snijdende vlakken    | 219      |
| - snijlijn van twee vlakken                     | 221      |
| XI. GRAFEN EN MATRICES                          | 225- 248 |
| 1. Werken met grafen en matrices                | 225      |
| a. Voorstellingen van een graaf                 | 225      |
| b. Gelijkwaardige grafen                        | 225      |
| c. Tekenpuzzels                                 | 226      |
| d. Gebouw(d) voor Gerard                        | 227      |

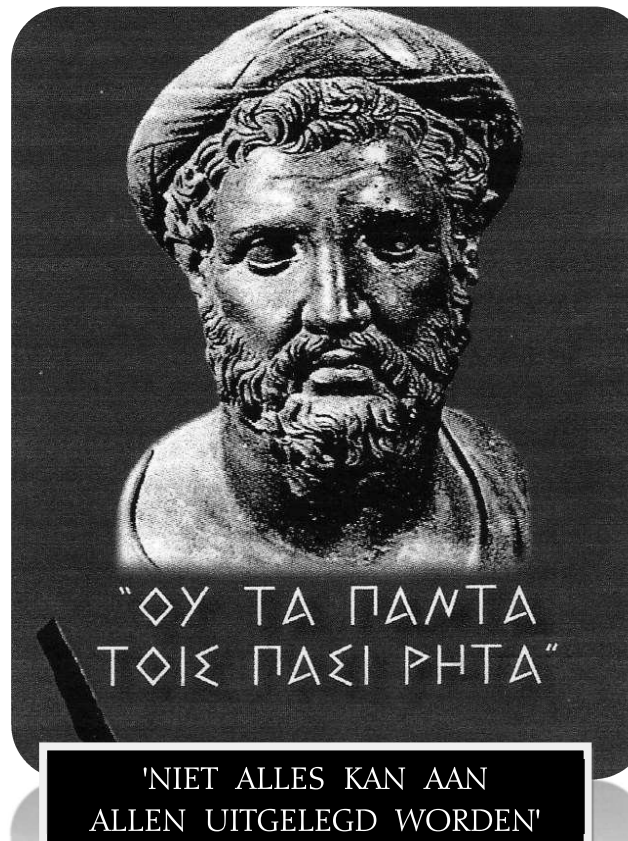
|                                                      |              |
|------------------------------------------------------|--------------|
| - Graaf en matrix                                    | 228          |
| - Het 'Handelsreizigersprobleem'                     | 229          |
| 2. Maximale en minimale verbondenheid van een graaf  | 230          |
| 3. Bewerkingen met matrices                          | 231          |
| a. Som en verschil van twee matrices                 | 231          |
| b. Scalair product van een matrix en een reëel getal | 232          |
| c. Product van twee matrices                         | 232          |
| 4. Overgangsmatrices                                 | 236          |
| a. Toepassingen op diverse deelgebieden              | 236          |
| b. Groei van populaties                              | 238          |
| c. Markowketens                                      | 239          |
| d. Stabilisatie                                      | 240          |
| 5. Populatievoorspellingen volgens Leslie            | 242          |
| a. Voorbeelden van een Leslie-graaf                  | 242          |
| - leeftijdsopbouw en totale populatie                | 243          |
| b. Exponentiële groei                                | 244          |
| c. Bijzondere populatiegroei                         | 244          |
| d. Bevolkingsgroei in China                          | 245          |
| e. Natuurbeheer                                      | 248          |
| <br>XII. RIJEN EN REEKSEN                            | <br>249- 274 |
| 1. Getallenrijen                                     | 249          |
| 2 Speciale rijen                                     | 250          |
| a. Rekenkundige rij                                  | 250          |
| b. Meetkundige rij                                   | 251          |
| c. Rij van Fibonacci                                 | 253          |
| 3. Convergentie en divergentie van rijen             | 254          |
| 4. Reeksen                                           | 255          |
| - Convergentie en divergentie van reeksen            | 255          |
| - Quotiëntencriterium van d' Alembert                | 256          |
| - Regel van Leibniz                                  | 257          |
| 5. Convergentie van standaardreeksen                 | 258          |
| a. Rekenkundige reeks                                | 258          |
| b. Meetkundige reeks                                 | 258          |
| c. Harmonische reeks                                 | 259          |
| d. Alternerende harmonische reeks                    | 260          |
| 6. Machtreeksen                                      | 260          |
| a. Eigenschappen van machtreeksen                    | 261          |
| b. Convergentie van machtreeksen                     | 262          |
| - Meetkundige reeks                                  | 263          |
| - Alternerende machtreeks                            | 263          |

# XI

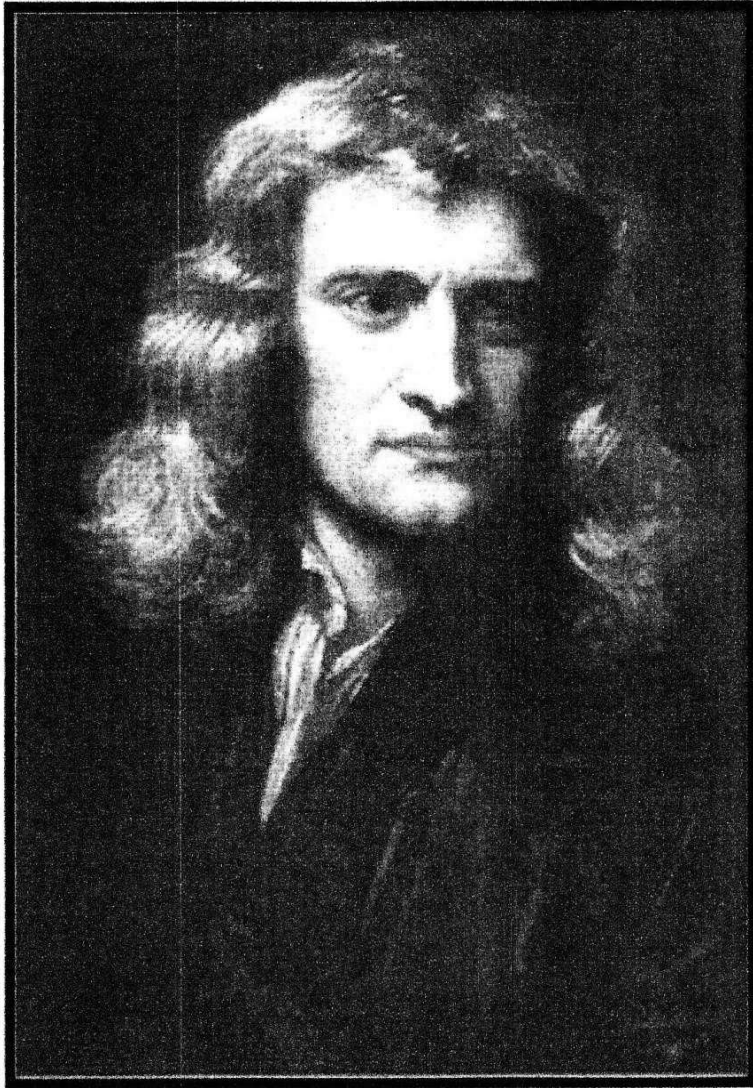
|                                                                         |          |
|-------------------------------------------------------------------------|----------|
| 7. Machtreeksontwikkelingen volgens Taylor en MacLaurin                 | 264      |
| a. De functie $f(x) = e^x$                                              | 266      |
| b. $f(x) = \sin(x)$                                                     | 266      |
| c. $f(x) = \cos(x)$                                                     | 267      |
| d. $f(x) = \tan^{-1}(x)$                                                | 267      |
| e. $f(x) = \ln(x)$                                                      | 268      |
| 8. Resttermen                                                           | 270      |
| - Resttermformule van Taylor                                            | 271      |
| - Formule van Lagrange                                                  | 271      |
| 9. Het Getal van Euler en het getal pi                                  | 271      |
| a. Het Getal $e$ van Euler                                              | 271      |
| - Definitieformule van $e$                                              | 272      |
| b. Het getal pi                                                         | 273      |
| XIII. DYNAMISCHE MODELLEN EN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN                | 275-286  |
| 1. Differentiaalvergelijkingen                                          | 275      |
| a. Voorbeelden                                                          | 275      |
| b. Lijnelementenvelden                                                  | 276      |
| c. Methode van Euler                                                    | 279      |
| d. Voorbeelden van continu dynamische modellen                          | 281      |
| XIV SPECIFIEKE ONDERWERPEN NAAR NIVEAU EN PROFIEL                       | 287- 357 |
| A. Perspectief                                                          | 287      |
| 1. Beelden via een glasplaat                                            | 287      |
| 2. Perspectiefbeelden van objecten                                      | 288      |
| a. Perspectiefbeeld van een lijn                                        | 288      |
| b. Beeld van evenwijdige lijnen in het grondvlak                        | 289      |
| c. Beeld van lijnen evenwijdig met het tafereel                         | 290      |
| d. Beeld van een punt in het grondvlak                                  | 290      |
| e. Beeld van een tegelpatroon                                           | 291      |
| 3. Ware gedaante van het perspectiefbeeld                               | 291      |
| - Ware perspectiefbeeld van tegelvloeren                                | 293      |
| 4. Eenpuntperspectief                                                   | 293      |
| a. Kubus en vierkante balk                                              | 294      |
| b. Tegelpaden van vierkante tegels                                      | 298      |
| 5. Tweepuntperspectief                                                  | 299      |
| - 'La Grande Arche'                                                     | 303      |
| B. Exacte logica                                                        | 305      |
| 1. Conjunctie, disjunctie, implicatie                                   | 305      |
| 2. Waarheidstabellen                                                    | 306      |
| a. Waarheidstabellen van $p \Rightarrow q$ , $p \wedge q$ en $p \vee q$ | 306      |
| b. De ontkenning niet $A$ ( $\neg A$ )                                  | 307      |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| c. Equivalenties                                 | 308 |
| - De Prinses en de tijger                        | 310 |
| 3. Bijzondere proposities                        | 312 |
| a. Bewerkingsvolgorden                           | 312 |
| b. Modus ponens, modus tollens, 'modus nonsens'  | 312 |
| 4.. Logische puzzels                             | 314 |
| a. De vier tegels                                | 314 |
| b. Het inslikken van olifanten                   | 315 |
| c. De vijf slavinnen van de kalief               | 316 |
| d. De zeven bordjes                              | 317 |
| 5. Algebra van Boole                             | 318 |
| a. Eigenschappen van de logische operatoren      | 318 |
| - Distributieve eigenschap                       | 318 |
| b. Speciale eigenschappen                        | 319 |
| C. Projectieve meetkunde                         | 320 |
| Kegelsneden in projectie                         | 320 |
| a. De ellips                                     | 321 |
| - Ware gedaante van de doorsnede                 | 322 |
| b. De parabool                                   | 323 |
| - Ware gedaante van de doorsnede                 | 324 |
| c. De hyperbool                                  | 324 |
| - Gelijkzijdige hyperbool                        | 324 |
| - Ongelijkzijdige hyperbool                      | 325 |
| D. De Lorentzfactor                              | 326 |
| E. Beslissingen na steekproeven                  | 328 |
| a. Normale toetsen                               | 328 |
| - Onderzoek naar de werking van een vulmachine   | 328 |
| - Toetsing van beweringen                        | 332 |
| b. Binomiale toetsen                             | 333 |
| c. Tekentoetsen                                  | 335 |
| F. Poisson-verdeling                             | 337 |
| G. Complexe getallen                             | 342 |
| a. Rekenen met complexe getallen                 | 342 |
| - Som, product en quotiënt                       | 342 |
| - Het complexe vlak                              | 343 |
| - Absolute waarde van een complex getal          | 343 |
| - Complexe getallen en poolcoördinaten           | 343 |
| - Complexe getallen als vectoren                 | 344 |
| b. Meetkunde in de complexe vectorruimte         | 344 |
| - De cirkel                                      | 344 |
| - De eenheidscirkel met sinus $z$ en cosinus $z$ | 346 |
| - Product van twee getallen op de eenheidscirkel | 346 |
| - Formules van Euler                             | 346 |
| - De polaire of $(r,\varphi)$ - notatie          | 347 |

|                                                      |         |
|------------------------------------------------------|---------|
| c. De complexe functie $e^z$                         | 351     |
| - De complexe functies cosinus $z$ en sinus $z$      | 352     |
| d. Wortels en polynomen                              | 352     |
| - $n^{de}$ machtswortels en $n^{de}$ graadspolynomen | 353     |
| Hoofdstelling van de Algebra                         | 354     |
| f. Reële polynomen                                   | 356     |
| Gebruikte symbolen en uitdrukkingen                  | 358,359 |
| Trefwoordenregister                                  | 360-363 |



*Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,.. (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').*



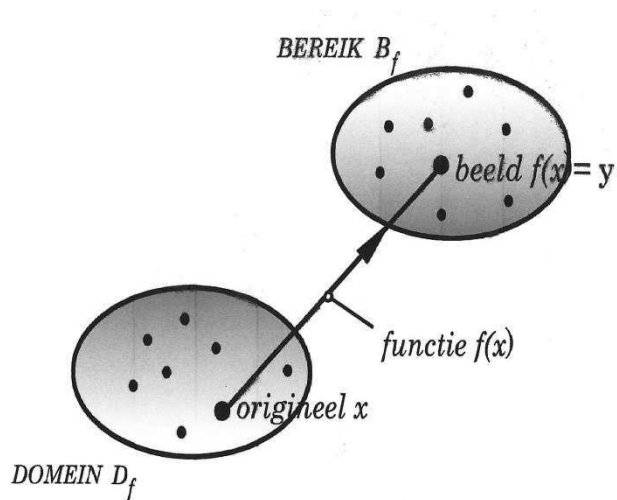
*Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, natuurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, .. De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als de grootste geleerde uit de wetenschap ooit.*

## I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 km aflegt dan is de afgelegde afstand in  $2\frac{1}{2}$  uur dus 10 km. De lengte van de **afgelegde weg bij die snelheid** is afhankelijk van de **tijd** ofwel: de afstand is een **functie** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd via een zeker **functievoorschrift**.

Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

### 1. Het begrip functie



Is bijvoorbeeld een functie  $f$  gegeven door het functievoorschrift:

‘vermenigvuldig met drie’ dan is  $f(3) = 9$ ,  
 $f(-7) = -21$  en  $f(a) = 3a$ .

De functie wordt dan geschreven als:

$f(x) = 3 \cdot x$  of korter  $y = 3x$

De getallen 3, -7 en  $a$  heten de **originelen** van de functie  $f(x) = 3x$ , de getallen 9, -21 en  $3a$  zijn de bijbehorende **beelden** ofwel **functiewaarden van  $f$** .

De verzameling *originelen* van  $f$  heet het **domein  $D_f$** , de verzameling *beelden* heet het **bereik  $B_f$** . In het plaatje hiernaast zijn de originelen in het domein en de beelden in het

bereik met zwarte stippen aangegeven. (Als ‘Venndiagram’ uit de voor het ‘Voortgezet Onderwijs’ in onmin geraakte ‘Verzamelingenleer’ van Georg Cantor).

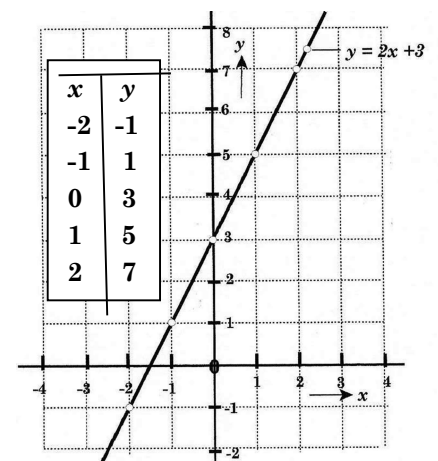
Als *geen speciaal domein of bereik is aangegeven*, wordt ervan uitgegaan dat *alle originelen en hun beelden* elementen zijn van de **verzameling reële getallen  $\mathbb{R}$** .

Een functie van  $x$  is een zeker voorschrift  $f$ , ( $g, h, i, \dots$ ) dat bij elk origineel  $x$  uit het domein  $D_f$ , precies één beeldt  $f(x) = y$  uit het bereik  $B_f$  bepaalt

Vaak worden origineel  $x$  en beeld  $y$  van een functie getekend als punten  $P(x, y)$  van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel: het *origineel  $x$*  op een horizontale  $x$ -as, het beeld  $y = f(x)$  op de verticale  $y$ -as. Het snijpunt van de assen is de **oorsprong  $O$** .

In bijgaande figuur is vanuit de  $x$ - $y$ -tabel de **grafiek** getekend van de functie:  $f(x) = y = 2x + 3$ .

Maak in opgaven steeds goed onderscheid tussen een **functie  $f(x)$**  en de **grafiek van die functie  $f(x)$** .



## 2. Lineaire functies

Voor elk tweetal punten  $P$  en  $Q$  van een lineaire functie geldt dat de **verhouding** tussen een zekere toename  $\Delta x = x_Q - x_P$  van  $x$  en de **bijbehorende** toename  $\Delta y = y_Q - y_P$  van  $y$  steeds een **vaste waarde** heeft. Gevolg  $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \text{constant} = c$ .

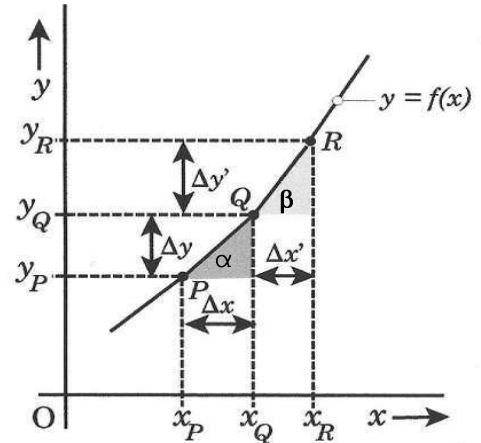
De betekenis hiervan is als volgt:

Stel  $P$  en  $Q$  zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie  $y = f(x)$  waarbij  $P = (x_P, y_P)$  en  $Q = (x_Q, y_Q)$ .

De verhouding  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bepaalt de grootte van de **hoek**  $\alpha$  die het lijnstukje  $PQ$  maakt met de horizontale lijn door  $P$  dus **bepaalt  $\alpha$  de richting van  $PQ$** . ... (1)

Stel verder dat  $R = (x_R, y_R)$  een volgend naburig punt van  $Q$  is op de grafiek van  $y = f(x)$ .

De verhouding  $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$  bepaalt de grootte van de **hoek**  $\beta$  die nu het lijnstukje  $QR$  maakt met de horizontale lijn door  $Q$  dus **bepaalt  $\beta$  de richting van  $QR$** . ... (2)



**Volgens de definitie** heeft de verhouding  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bij een lineaire functie dus een vaste waarde zodat er geldt:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$  dus is volgens (1) en (2) de **richting**  $\alpha$  van lijnstukje  $PQ$  gelijk aan de richting  $\beta$  van lijnstukje  $QR$ , ofwel:

$PQ$  en  $QR$  liggen in elkaars verlengde dus  **$P, Q$  en  $R$  liggen op een rechte lijn**.

(Dit verklaart de naam **lineaire functie**).

Voor de lijn  $l$  tussen twee willekeurige punten  $P = (x_P, y_P)$  en  $Q = (x_Q, y_Q)$  geldt nu dat

de factor  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  ( $x_Q \neq x_P$ ) de **richting bepaalt** van lijn  $l$ . \*)

De waarde  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  heet daarom de **richtingscoëfficiënt  $a$**  van  $l$ . ... (3)

We bepalen nu een **vergelijking** van lijn  $l$ , dus een betrekking tussen de waarden  $x$  en  $y$  waaraan **alle punten  $P(x, y)$  van lijn  $l$  ( $l$  niet evenwijdig met de  $y$ -as) voldoen**:

Kies het punt  $P = (x_P, y_P) = (0, b)$  van  $l$  op de  $y$ -as en een punt  $Q = (x_Q, y_Q) = (x, y)$  op  $l$

Uit  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  ( $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$ ) ... (1) volgt  $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - b}{x - 0} = \frac{y - b}{x} \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow y = ax + b$ .

Omdat een **lineaire functie** dus voldoet aan de vergelijking  $f(x) = y = ax + b$  noemt men deze meestal een **eerstegraads functie** (want  $x$  komt hoogstens tot de eerste macht voor).

ONTHOUD:

*De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn  $l$  met vergelijking  $y = ax + b$  waarin  $a$  de richtingscoëfficiënt is van  $l$  en  $b$  de  $y$ -coördinaat van het snijpunt van  $l$  met de  $y$ -as of populair: het door  $l$  afgesneden stuk van de  $y$ -as*

\*) Als  $l \parallel y$ -as dan is bij elke  $y$ :  $x_P = x_Q$  dus  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$  bestaat dan niet omdat  $x_Q - x_P = 0$ .

Bij elke  $y$  is dan  $x = x_P = x_Q$  dus is  $x = x_P$  ( $= x_Q$ ) de vergelijking van  $l$  ( $l \parallel y$ -as, (zie vervolg bl 3-b)

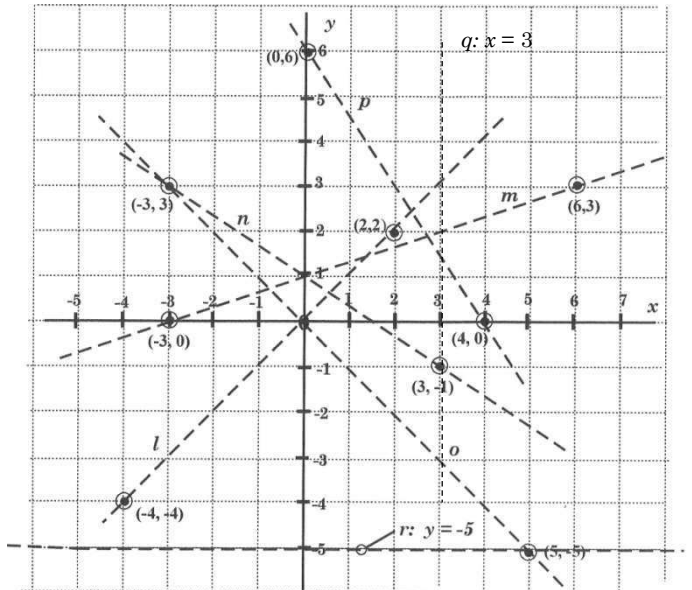
### Voorbeelden

1. In deze figuur zijn de lijnen  $l, m, n, o$  en  $p$  getekend door twee gegeven, omcirkelde punten in een **orthonormaal coördinatenstelsel**  $XOY$ .

Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaatassen.

De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1.

- Bepaal van elke lijn de vergelijking
- Bepaal de vergelijking van de X-as en de Y-as.
- Hoe lopen de lijnen  $q$  en  $r$  als:  
 $q: x = 3$  en  $r: y = -5$ ?



De grafiek van een eerstegraads functie  $y = f(x) = ax + b$ , is een rechte lijn  $l$  waarin  $a$  de *richtingscoëfficiënt* is van  $l$ , en  $b$  de *y-coördinaat* van het *snijpunt* van  $l$  met de *y-as*.

Ga bij elke lijn uit van de twee omcirkelde punten op die lijn.

Noem het hoogste punt van een lijn steeds  $P(x_q, y_q)$  en het laagste punt  $Q(x_p, y_p)$

- a: 1. Van lijn  $l$ :  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{2 - (-4)}{2 - (-4)} = 1$  en  $b = 0$  want ook  $O(0, 0)$  ligt op lijnstuk

$(-4, -4), (2, 2)$ . dus de vergelijking is  $l: y = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow l: y = x$ .

2. Voor  $m$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{3 - 0}{6 - (-3)} = \frac{1}{3}$  en  $b = 1$

dus wordt de vergelijking:  $m: y = \frac{1}{3}x + 1$

3. Voor  $n$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-1 - 3}{4 - (-3)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$  en  $b = 1$

dus is de vergelijking is  $n: y = \frac{-2}{3}x + 1$

4. Voor  $o$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-5 - 3}{3 - 0} = \frac{-8}{3} = -1$  en  $b = 0$

dus de vergelijking is:  $o: y = -x$

5. Voor  $p$  geldt  $a = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{0 - 6}{4 - 0} = -\frac{3}{2}$  en  $b = 6$

dus de vergelijking is:  $p: y = -\frac{3}{2}x + 6$

- b- Voor alle punten op de *x-as* geldt:  $y = 0$ .

De vergelijking van de *x-as* is dan:  $y = 0$ .

Zo geldt voor alle punten van de *y-as*:  $x = 0$  dus is de vergelijking van de *y-as*  $x = 0$

- c - Alle punten  $(x, y)$  van de lijn  $q$  met vergelijking  $x = 3$ , zijn hebben als coördinaten  $\{3, y\}$  de vorm  $(3, y)$ , waarin  $y$  elk reëel getal kan zijn.

Het is dan de **lijn, evenwijdig met de y-as door het punt  $(3, 0)$** .

Zo is de lijn  $r: y = -5$  de **lijn evenwijdig met de x-as door het punt  $(0, -5)$** .

*Populair samengevat: Elke lineaire (eerstegraads) functie  $y = f(x)$  heeft als vergelijking  $y = ax + b$  waarin  $a (\neq 0)$  en  $b$  steeds reële getallen zijn.*

*De grafiek van  $y = ax + b$  is een rechte lijn  $l$ . Hierin is  **$a$  de richtingscoëfficiënt van lijn  $l$ , en  $b$  is het stuk (positief of negatief) dat lijn  $l$  van de y-as afsnijdt.***

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn  $l$  door de punten  $A = (3, 4)$  en  $B = (-4, -2)$   
 - b. Bepaal het snijpunt van de lijn  $l$  met de lijn  $m: y = 2x - 3$

a. In  $l: y = ax + b$  volgt de richtingscoëfficiënt

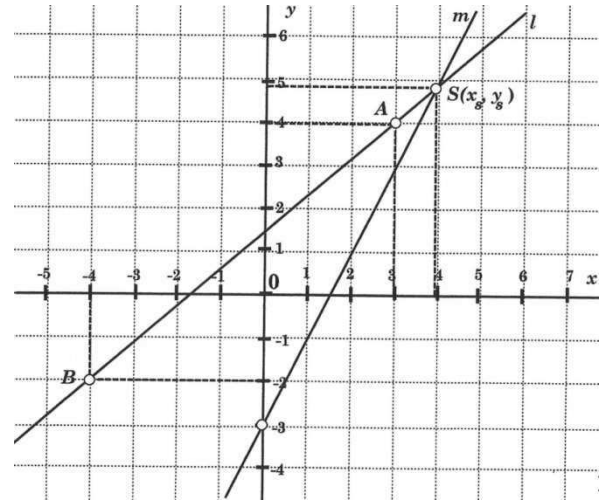
van  $l$  uit:  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 4}{-4 - 3} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

Lijn  $l$  heeft dan als vergelijking:  $l: y = \frac{6}{7}x + b$ .

Hierin de coördinaten van  $A = (3, 4)$  (of  $B = (-4, -2)$ )

ingevuld geeft  $4 = \frac{6}{7} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$  zodat de

vergelijking is  $l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}$  \*)



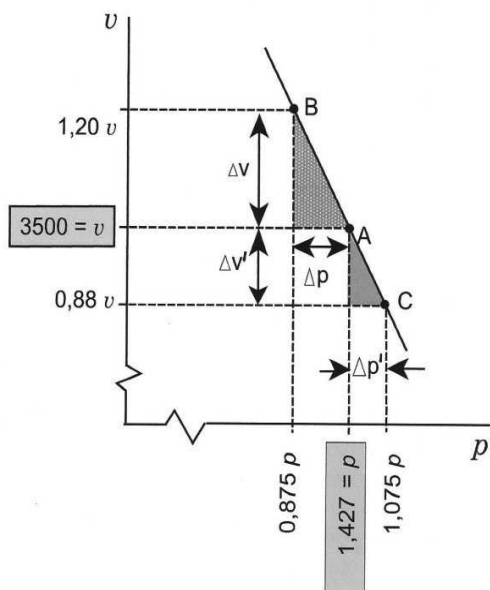
b. Het snijpunt  $S(x_s, y_s)$  van de lijnen  $l$  en  $m$  ligt zowel op  $l$  als op  $m$ , dus voldoen de coördinaten  $x_s$  en  $y_s$  aan de vergelijking:

$$l: y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7} \text{ en aan } m: y = 2x - 3, \text{ zodat dan } \frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow x_s = \frac{31}{8}$$

$$\text{Uit } y_s = 2x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2} \text{ volgt dan } y_s = 2 \cdot \frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

Het snijpunt van  $l$  en  $m$  is dus het punt  $S(\frac{31}{8}, \frac{19}{4})$ .

3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als de literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).  
 Verlaagt men de prijs met 12,5 % dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).  
 Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%.(punt C).



- a. Bewijs dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen.  
 b. Toon aan dat op het traject BC de toename van de verkoop bij prijsdaling evenredig is met de afname van de verkoop bij prijsstijging.

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1,20 v}{p - 0,875 p} = \frac{-0,20 v}{0,125 p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingscoëfficiënt van CA is

$$\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0,88 v - v}{1,075 p - p} = \frac{-0,12 v}{0,075 p} = -1,6 \cdot \frac{v}{p}$$

De richtingen van AB en CA zijn dus gelijk  $\Rightarrow$   
**A, B en C liggen op een rechte lijn.**

\*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de lijsten in {3, - 4} [STO] L1 en {4, - 2} [STO] L2.  
 Druk op [STAT] [CALC] en kies optie 4 [ENTER]: LinReg (ax + b) [ENTER]  
 De waarden van a en b worden direct getoond: LinReg y = ax + b: a ≈ .85714... =  $\frac{6}{7}$ ; b ≈ 1.42857... =  $\frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject *BC* de *verhouding* :

*prijsstijging : verkoopdaling* (-1,6) gelijk is aan de verhouding

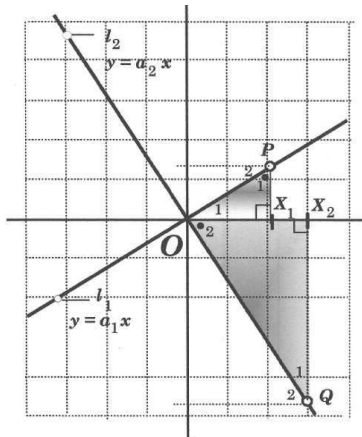
*prijzdaling : verkoopstijging* (-1,6).

De verkoopdaling bij toenemende prijs is dan *evenredig* met de verkoopstijging

bij dalende prijs, want een *evenredigheid* is een *gelijkheid van twee verhoudingen*.

### Eigenschap:

Als twee lijnen  $l_1$  en  $l_2$  loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten  $a_1$  en  $a_2$  gelijk aan  $-1$ , dus  $a_1 \cdot a_2 = -1$  en ook omgekeerd.



**Bewijs:** In de figuur is vanuit een punt  $P$  op  $l_1$  een loodlijn  $PX_1$  op de  $x$ -as neergelaten en ook een loodlijn  $QX_2$  vanuit een punt  $Q$  van  $l_2$  op de  $x$ -as.

De richtingscoëfficiënten van  $l_1$  en  $l_2$  zijn respectievelijk:

$$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}; a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}, \text{ dus } a_1 \cdot a_2 = - \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} \quad \dots(1)$$

Van de  $\Delta \Delta OPX_1$  en  $OQX_2$  is  $\angle O_2 + \angle O_1 = 90^\circ$  (gegeven).

Ook is in  $\Delta OPX_1$ :  $\angle P_1 + \angle O_1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

dus is  $\angle P_1 = \angle O_2$ . (met zwarte stip).

De  $\Delta \Delta OPX_1$  en  $OQX_2$  zijn gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en

$\angle P_1 = \angle O_2 \Rightarrow PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2$  dus ook:

$$-PX_1 : OX_1 = -OX_2 : QX_2 \quad (2)$$

(2) in (1) gesubstitueerd geeft dan  $a_1 \cdot a_2 = - \frac{OX_2}{QX_2} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} = -1$  zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als  $a_1 \cdot a_2 = -1$  dan staan  $l_1$  en  $l_2$  loodrecht op elkaar.

Om dit te bewijzen lees je bovenstaand bewijs van achteren naar voren.

## 3. Kwadratische functies

Een kwadratische- ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie  $f(x)$  van de vorm  $f(x) = ax^2 + bx + c$  waarin  $a$ ,  $b$  en  $c$  reële getallen zijn en  $a \neq 0$

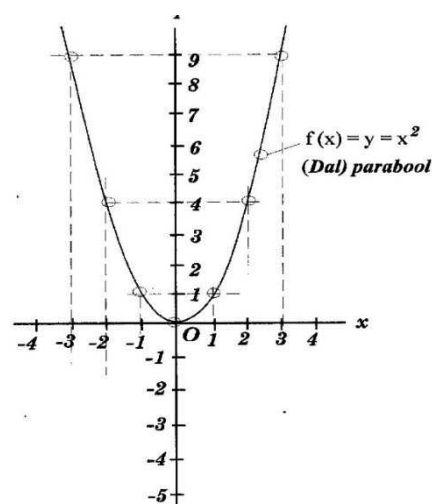
Hieronder zie je de grafiek van de standaard kwadratische functies  $y = x^2$

dus met  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ .

Kijk nu naar de

| $y = x^2$ |     |
|-----------|-----|
| $x$       | $y$ |
| 0         | 0   |
| -1        | 1   |
| -2        | 4   |
| -3        | 9   |
| 1         | 1   |
| 2         | 4   |
| 3         | 9   |

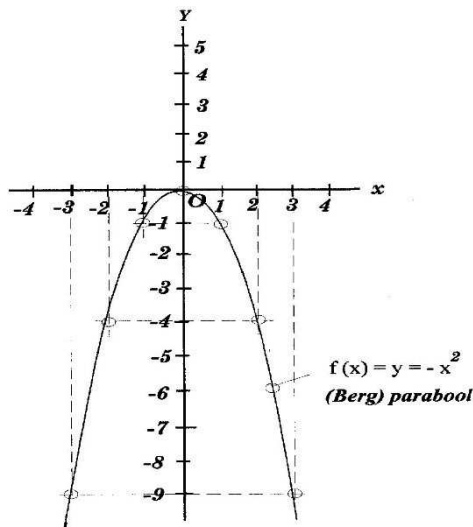
dus



Voor de  $x$ -waarden  $x = 0, -1, -2, -3, 0, 1, 2, 3$  vind je de  $y$ -waarden in de tabel. Omdat  $x^2 = -x^2$  zijn de  $y$ -waarden bij 1, 2, 3 gelijk aan die van  $-1, -2, -3$ . Hierdoor is de ontstane kromme symmetrisch in de  $y$ -as. Het laagste punt van de kromme heet **de top**, de kromme zelf heet parabool, de  $y$ -as heet **de as** van de parabool. Hoe groter de absolute waarden op de  $x$ -as, hoe groter natuurlijk de  $y$ -waarden. De populaire naam: **Dalparabool** is daarom duidelijk

Kijk nu naar de grafiek van de standaard kwadratische functie  $y = -x^2$ , dus met  $a = -1$ ,  $b = c = 0$

| $y = -x^2$ |    |
|------------|----|
| x          | y  |
| -1         | -1 |
| -2         | -4 |
| -3         | -9 |
| 1          | -1 |
| 2          | -4 |
| 3          | -9 |



Van de x-waarden  $x = 0, -1, -2, -3, 0, 1, 2, 3$  vind je de y-waarden in de tabel. Omdat  $x^2 = -x^2$  zijn de y-waarden bij 1, 2, 3 gelijk aan die van  $-1, -2, -3$ .

Hierdoor is ook hier de ontstane kromme symmetrisch in de y-as. Het hoogste punt van de kromme heet **de top**, de kromme zelf is weer de parabool. De y-as heet **de as** van de parabool. Hoe groter de absolute waarden op de x-as, hoe kleiner de y-waarden. De naam: '**bergparabool**' is dan ook nu duidelijk.

### Eigenschappen en rekenregels van kwadratische functies

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraadsfuncties, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van 'kwadraatsplitsing': \*)

Uit de onderbouw:  
'Papegaaimethode' voor producten

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
 &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)
 \end{aligned}$$

ofwel:  $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$  waarin  $D = b^2 - 4ac$ .

$$\begin{aligned}
 (a+b)(c+d) &= (a+b) \times (c+d) \\
 &= ad + db + bc + ca \\
 (a+b)(a+b) &= (a+b) \times (a+b) \\
 &= ab + bb + ba + aa \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a+b)(a-b) &= (a+b) \times (a-b) \\
 &= -ab - bb + ba + aa \\
 &= a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

De functie  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) is gelijkwaardig met de tweedegraadsfunctie:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \text{ waarin } D = b^2 - 4ac.$$

\*) In deze kwadraatsplitsing is gewerkt naar de vorm  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ , een toepassing van het 'merkwaardig product'  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
In het tekstvak is dit met de 'papegaaimethode' gedemonstreerd evenals het merkwaardig product:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Substitueer je  $x_T = -\frac{b}{2a}$  in de algemene formule  $f(x) = y = a(x + (\frac{b}{2a}))^2 - \frac{D}{4a}$   
dan vind je  $y_T = -\frac{D}{4a}$ . (Even nagaan!)

Dit betekent dat het punt  $(x, y) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een punt is **van elke kwadratische functie**  
 **$f(x) = ax^2 + bx + c$ .**

Noem je dit punt  $T$ , dan is dus  **$T(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$**  **...(a)**

We bewijzen nu dat het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een *uiterste waarde (extreem)* is  
van de tweedegraadsfunctie  $f(x)$ . Neem een willekeurige waarde  $y$  ongelijk aan  $y_T$ .

Als  $a > 0$  dan is  $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ , want ook  $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ .

Dit betekent dat  $y - y_T > 0$  ( $y > y_T$ ) zodat elke waarde van  $y$  in  $y = ax^2 + bx + c$  groter dan of  
gelijk is aan  $y_T$ , dus is het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  een *minimum van de grafiek*  
.. van de functie  $f(x)$ . **...(b)**

Op eenzelfde manier blijkt uit (b) dat als  $a < 0$  steeds geldt

$y - y_T < 0$  ( $y < y_T$ ) ofwel:  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  is een *maximum* van de grafiek van  $y = ax^2 + bx + c$ .

Het punt  $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ , *minimum of maximum, afhankelijk van  $a$* , heet de *top* van de  
kwadratische functie  $f(x)$ .

**ONTHOUD:**

*De grafiek van de kwadratische- ofwel tweedegraadsfunctie:  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
waarin  $a \neq 0$  en  $b$  en  $c$  reële getallen zijn, is een parabool  
met **verticale as**:  $x = -\frac{b}{2a}$  en een pint  **$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  als top.**  
Als  $a > 0$  dan is  $T$  een minimum ('dalparabool'),  
als  $a < 0$  dan is  $T$  een maximum ('bergparabool')*

### **a. Nulpunten van een kwadratische functie**

*Eventuele snijpunten* van de parabool  $y = ax^2 + bx + c$  met de  $x$ -as ( $y = 0$ ) moeten voldoen  
aan de vergelijking  $y = ax^2 + bx + c$  **en** aan  $y = 0$  dus zijn de **oplossingen** van de vergelijking  
 $ax^2 + bx + c = 0$ . Ze worden ook **nulpunten** of **wortels** van  $f(x)$  genoemd.

Voor de oplossing van de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  wordt in de meeste gevallen de  
'**abc-formule**' gebruikt:

### **Afleiding van de abc-formule**

Schrijf je de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  in de vorm van de *kwadraat-afplitsing*, dan vind je:  
 $a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = 0$ .

Hieruit  $x$  oplossen gaat dan als volgt:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{D}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

$$\text{met gevolg: } x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

*Nulpunten van  $f(x) = ax^2 + bx + c$  zijn oplossingen van de vergelijking*

$$y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

De waarde van  $D$  hierin bepaalt het *aantal oplossingen*, dus het *aantal wortels* van  $ax^2 + bx + c = 0$ . Men noemt daarom  $D$  de **discriminant** van deze vergelijking:

1<sup>o</sup>. Als  $D = b^2 - 4ac > 0$  dan bestaat  $\sqrt{D}$  en heeft de vergelijking *twee verschillende wortels*:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

De parabool snijdt dan de  $x$ -as in de punten  $x_1$  en  $x_2$ .

2<sup>o</sup>. Als  $D = 0$  dan is  $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$  dus volgt uit  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$  en

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a} \text{ dus heeft de vergelijking slechts één ('dubbel tellende')}$$

$$\text{wortel } x = -\frac{b}{2a}.$$

In top  $T$  van de parabool zijn de punten  $x_1$  en  $x_2$  samengevallen op de  $x$ -as tot één 'raakpunt'

3<sup>o</sup>. Als  $D < 0$  dan bestaat  $\sqrt{D}$  niet in  $\mathbb{R}$  dus zijn er *geen reële oplossingen* (wel twee imaginaire oplossingen in  $\mathbb{C}$ ).

De parabool snijdt de  $x$ -as niet. Er zijn *geen reële nulpunten*. \*)

## **b. Ontbinden van kwadratische functies**

ONTHOUD:

*De functie  $f(x) = x^2 + bx + c$  met nulpunten  $x = x_1$  en  $x = x_2$  is te schrijven als  $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$*

**Bewijs::**

De nulpunten  $x_1, x_2$  van de vierkantsvergelijking  $y = ax^2 + bx + c$  met  $a = 1$  zijn volgens de

$$\text{abc-formule: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2} \text{ met } D = b^2 - 4c \text{ en } a = 1.$$

\*) In het volgende hoofdstuk worden imaginaire oplossingen van vierkantsvergelijkingen besproken (als  $D < 0$ ) In Hoofdstuk XIV worden expliciet voor wiskunde  $D$  de complexe getallen uitgebreid behandeld.

Het **product**  $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$  is dan  $\left\{x - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2}\right)\right\} \cdot \left\{x - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2}\right)\right\}$  dus:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = \left(\frac{2x + b - \sqrt{D}}{2}\right) \cdot \left(\frac{2x + b + \sqrt{D}}{2}\right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + 4c}{4} \text{ want } D = b^2 - 4ac \text{ en } a = 1 \text{ dus } b^2 - D = 4c \text{ zodat } (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \dots(1)$$

Met de gelijkheid  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$  is de term  $x^2 + bx + c$  volgens (1) **ontbonden in twee factoren**  $(x - x_1)$  en  $(x - x_2)$  waarin  $x_1$  en  $x_2$  de *nulpunten* van  $f(x)$  zijn.

Uitgewerkt geeft dit:  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) \equiv x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$   
 waarin dus  $(x_1 + x_2) = -b$  en  $x_1 \cdot x_2 = c$ . ...(2)

Op deze eigenschap berust een methode om de wortels  $x_1$  en  $x_2$  van  $f(x) = 1x^2 + bx + c = 0$  snel te kunnen vinden:

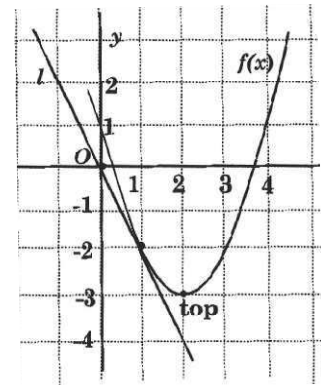
**Voorbeeld:** Bepaal de wortels van de vergelijking  $x^2 - 11x + 28 = 0$ ,

Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf  $x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + p \cdot q$ . (Steeds mogelijk als  $D \geq 0$  is, omdat er dan één of twee nulpunten  $p, q$  zijn, dus regel (1) van toepassing is.)

Hier geldt dan dat  $p + q = 11$  en  $p \cdot q = 28$ , waaruit direct volgt  $p = 4$  en  $q = 7$  zodat  $x^2 - 11x + 28 = (x - 4) \cdot (x - 7)$  dus volgen de nulpunten uit:  
 $x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 7) = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \vee x - 7 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = 7$

**Opgaven:** 1. Bereken de nulpunten van  $f(x) = x^2 - x - 12$

Schrijf  $x^2 - x - 12 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p + q)x + p \cdot q$ , dan is  $p + q = 1$  en  $p \cdot q = -12$ . Hieraan voldoen  $p = 4$  en  $q = -3$  dus als  $x^2 - x - 12 = 0$ , dan is  $(x - p) \cdot (x - q) = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$  zodat  $x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -3$ .  
 De nulpunten zijn dan  **$x = 4$  en  $x = -3$** .



2. Los op:  $x^2 + 2x - 143 = 0$

Stel  $x^2 + 2x - 143 = (x - p) \cdot (x - q) = x^2 - (p + q)x + p \cdot q$ , dan is  $p + q = -2$  en  $p \cdot q = -143$  dus  $p = -13$  en  $q = 11$ , dus als  $x^2 + 2x - 143 = 0$ , dan is  $(x - (-13)) \cdot (x - 11) = 0$  zodat  $x + 13 = 0 \vee x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11 \vee x = -13$

3. Gegeven is de parabool  $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$

a. Bepaal de top van de parabool.

Uit  $x_T = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_T = \frac{-D}{4a}$  (blz. 7) volgt direct dat  $x_T = -\frac{4}{2} = -2$   
 en  $y_T = -\frac{12}{4} = -3$ . De top is dus het punt  **$T(-2, -3)$** .

b. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool in het punt (1, -2).

Het punt  $P(1, -2)$  ligt op de parabool  $y = x^2 - 4x + 1$  want  
 $-2 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 1$  dus voldoet aan de vergelijking.

Noem de raaklijn  $l: y = ax + b$ , dan geldt voor het raakpunt op  $l$

$$P(1, -2) = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = -2 \Rightarrow a = -2 - b. \quad \dots(1)$$

Omdat het raakpunt zowel op de parabool als op de raaklijn  $l$  ligt

$$\text{geldt: } y = x^2 - 4x + 1 = (-2 - b)x + b \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 1 = -2x - bx + b \Rightarrow x^2 - 2x + bx + 1 - b = 0 \Rightarrow$$

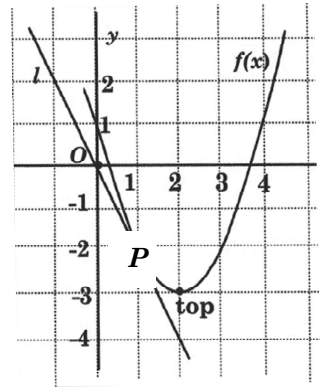
$$x^2 + (b - 2)x + (1 - b) = 0$$

De discriminant  $D$  van deze tweedegraadsvergelijking

moet nul zijn omdat de vergelijking één wortel heeft, dus is

$$b^2 - 4 \cdot ac = (b - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - b) = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 - 4 + 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \dots(2)$$

Uit (1) en (2) volgt dan:  $b = 0$  en  $a = -2$ , dus is de raaklijn  $l: y = ax + b \Rightarrow y = -2x$ .



#### 4. Machtsfuncties

*De functie  $y = f(x) = x^n$  is een machtsfunctie van  $x$ , waarin de exponent  $n$  een constante is en het grondtal  $x$  een variabele*

Enkelvoudige machtsfuncties zijn van het type  $y = f(x) = x^n$  met  $n \in \mathbb{R}$ .

Samengestelde machtsfuncties zijn van de vorm  $y = f(x) = ax^p + bx^q + cx^r + \dots$

( $a, b, c$  en  $p, q, r \in \mathbb{R}$ ). Deze noemt men meestal **polynomen**.

Uitgaand van de definitie van een natuurlijke macht van  $x$ :

$x^1 = x$ ,  $x^2 = x \cdot x$ ,  $x^3 = x \cdot x \cdot x$ ,  $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$  of algemeen:  $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ keer}}$  volgen direct de regels:  $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$ ,  $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$  en  $(x^p)^q = x^{p \cdot q}$ ,

zodat dan  $\frac{x^p}{x^p} = x^{p-p} = x^0$  en ook  $\frac{x^p}{x^p} = 1$ , dus  $x^0 = 1$ .

**Gevolgen:**  $\frac{1}{x^p} = \frac{x^0}{x^p} = x^{0-p} = x^{-p}$  en  $\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}$  omdat  $(x^{\frac{1}{p}})^p = x^{\frac{1}{p} \cdot p} = x^1 = x$ .

Zo ook:  $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

**ONTHOUD:**

$$\begin{array}{llll} a^p \cdot a^q = a^{p+q} & (a^p)^q = a^{p \cdot q} & a^{-p} = \frac{1}{a^p} & a^0 = 1 \\ \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} & (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p & \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \end{array}$$

**Per definitie** gelden deze rekenregels voor alle machten met **reële exponenten**:

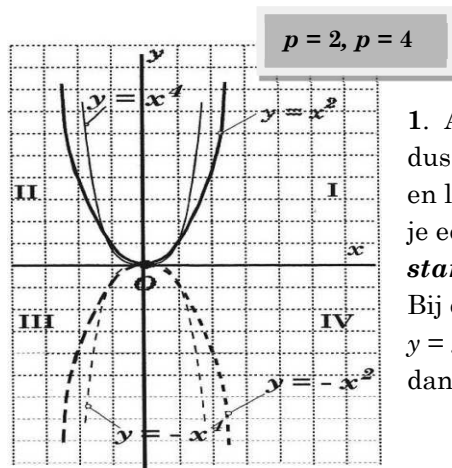
Voorbeelden:

$$3^7 \cdot 3^{-9} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad 5^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^5}}, \quad 7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}, \quad 12^{-0,38} \approx 0,389 \text{ (met GR)}$$

*Machtsfuncties waarin  $x$  hoogstens tot de macht  $n$  voorkomen, heten  $n^{\text{de}}$  graads machtsfuncties.*

## a. Grafieken van machtsfuncties

Aan de graad van enkelvoudige machtsfunctie kun je globaal de grondvorm van hun grafieken afleiden. We onderzoeken hier de grafieken in de vier kwadranten I, II, III en IV van machtsfuncties  $f(x) = y = x^p$  bij verschillende waarden van  $p$ .

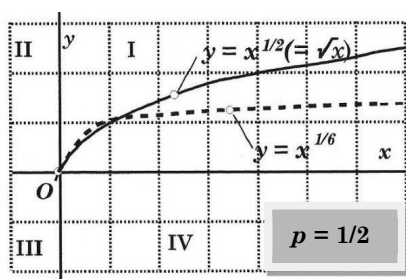
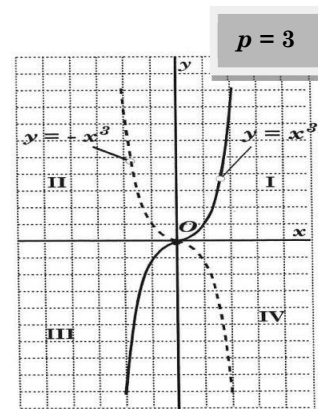


1. Als  $p$  in  $y = x^p$  een **positief, even getal** is, dus  $p = 2, 4, 6, \dots$  dan zijn alle  $y$ -waarden van  $y = x^p$  positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de grondvorm herken je een **dalparabool**, die als  $p = 4, 6, 8, \dots$  'puntiger' is dan de **standaard dalparabool**  $y = x^2$  dus met  $p = 2$ . Bij eenzelfde waarde van  $p$  is  $y = -x^p$  het spiegelbeeld van  $y = x^p$  in de  $x$ -as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm dan ook de **bergparabolen**.

2. Is  $p$  in  $y = x^p$  een **positief, oneven, geheel getal  $\neq 1$** , dus  $p = 3, 5, 7, \dots$  dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van  $x$  ( $x^2, x^4, x^6, \dots$  die steeds  $\geq 0$  zijn), ook **negatieve  $y$  waarden**. Bijvoorbeeld  $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$ .

Hierdoor heeft  $y = x^p$  bij *oneven*  $p$  dan punten in het *eerste kwadrant* (I) en het *derde kwadrant* (III).

**Omdat**  $(-x)^p = -(x^p)$  is de grafiek van  $y = x^p$  als  $p$  negatief is, een spiegeling in de oorsprong van  $y = -(x^p)$



3. Als  $p$  in  $y = x^p$  een **positieve breuk** is, waarvan de **teller oneven is en de noemer even**, zoals in

$y = x^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{x})$  en  $x^{\frac{1}{6}}$  dan bestaan **geen reële  $y$ -waarden bij negatieve  $x$** . Zo is bij  $y = x^{\frac{1}{2}}$  als  $x = -1$  gelijk aan  $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$  en is  $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$  bij  $x = -1$  gelijk aan  $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$  dus bestaan niet in  $\mathbb{R}$ . (zijn imaginair).

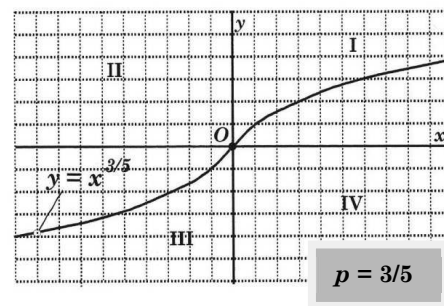
Omdat bij een **positieve waarde van  $x$**  ook alle machten van  $x$  positief zijn, liggen alle waarden van  $y = x^p$  in I.

4. Als  $p$  in  $y = x^p$  een **positieve breuk** is, met **teller en noemer oneven** dan bestaan er ook reële  $y$  waarden bij **negatieve  $x$** , die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen.

Zo is hier de  $y$  waarde van  $x = -4$  in  $y = x^{\frac{3}{5}}$ :

$$y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2,297.$$

De grafiek van  $y = x^{\frac{3}{5}}$  ligt dus in I en III. \*)



\*) Met de GR TI-83/84 zijn alle grafieken direct te 'plotten'. VB: Voer in:  $Y1 = X \wedge 3 \div 5$  ENTER.

Druk op WINDOW en kies Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -5, Ymax = 5. Kies Xscl = 1 en Yscl = 1 ENTER. Druk op Graph en de grafiek uit voorbeeld 4 verschijnt op je scherm.

## b. Transformaties

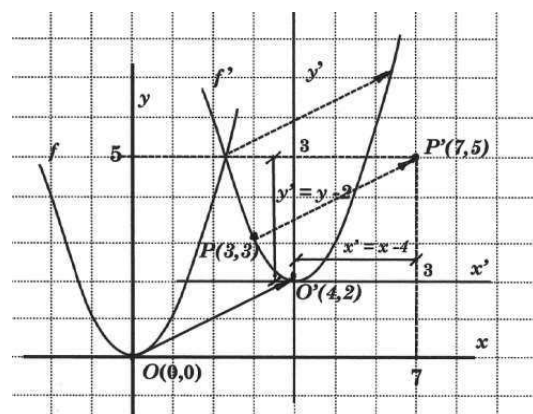
Uit de grafieken van *standaardfuncties* zoals  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$  kan je via *transformaties* vaak formules afleiden van meer gecompliceerde functies.

Bij een **congruentietransformaties** als *translatie* ('evenwijdige verschuiving') ontstaat uit een functie  $f(x)$  een functie  $f'(x)$  waarvan de grafiek congruent is met die van  $f(x)$ .

### - Transformaties door translatie

Hiernaast is in een  $XOY$ -stelsel de grafiek  $f$  getekend van de '*standaardparabool*'  $y = x^2$ . De top ligt in de oorsprong  $O$ . Via een **translatie**  $T(4,2)$  verschuiven alle punten over +4 eenheden naar rechts (positieve  $x$ -richting) en +2 eenheden omhoog (positieve  $y$ -richting), waardoor een **met  $f$  congruente** grafiek  $f'$  ontstaat. De oorsprong  $O(0,0)$  = top van  $f$ , wordt nu afgebeeld op het punt  $O'(4,2)$ , de oorsprong van het verschoven assenstelsel  $x'O'y'$ .

Een willekeurig punt  $P(x, y)$ , (in de figuur  $P(3,3)$ ), wordt door de translatie  $T(4,2)$  afgebeeld op het punt  $P'(x+4, y+2)$ , (in de figuur  $P'(7,5)$ ).



Ten opzichte van het  $x'O'y'$ -stelsel geldt dan dat  $x' = x - 4$  en  $y' = y - 2$  ... (1)

De vergelijking van de verschoven parabool  $f'$  is  $f': y' = (x')^2$  want de top van  $f'$  ligt in de oorsprong  $O'$  dus geldt hier de *topvergelijking* ten opzichte van het stelsel  $x'O'y'$ .

Substitutie hierin van de waarden  $x' = x - 4$  en  $y' = y - 2$  uit (1) geeft als vergelijking van de parabool  $f'$ :  $y - 2 = (x - 4)^2 \Rightarrow y = (x - 4)^2 + 2$ . ... (2)

Noem je de *translatie*  $T(4,2)$  nu algemeen  $T(a, b)$ , dan volgt direct uit (2):

$f: y = x^2 \Rightarrow T(a, b) \Rightarrow f': y = (x - a)^2 + b$  ... (3)

Deze transformatieregel werd voor de duidelijkheid afgeleid via de functie  $f(x) = y = x^2$  door op het translatiebeeld  $y' = x'^2$  de *algemeen geldende betrekkingen bij translaties* toe te passen. De regel geldt onvoorwaardelijk ook voor elke andere functie  $y = f(x)$  zoals  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \ln(x)$ ,  $y = \sin(x)$ , ... dus:

ONTHOUD:

Bij de translatie  $T(a,b)$  geldt voor het beeld  $f'(x)$ :  $y = f(x - a) + b$

### Voorbeelden:

1. Schets de grafiek van de functie  $f: y = (x + 2)^2 + 1$

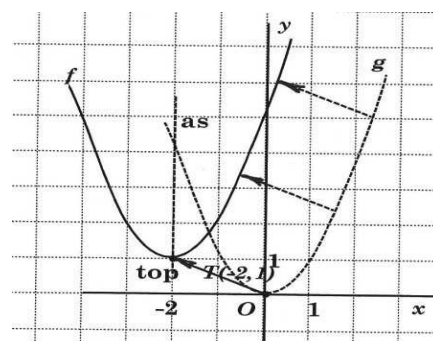
Volgens de definitie gaat bij een translatie  $T(a, b)$

de grafiek  $g$  van  $y = f(x) = x^2$  over in  $f: y = (x - a)^2 + b$ .

In  $f: y = (x + 2)^2 + 1$  is dan  $a = -2$  en  $b = 1$  dus ontstaat de functie  $f: y = (x + 2)^2 + 1$  uit de translatie  $T(-2, 1)$  van  $y = f(x) = x^2$ .

In de figuur is de grafiek van  $f$  getekend.

De **top** is dan het punt  $(-2, 1)$ , de **as** is de lijn  $x = -2$ .

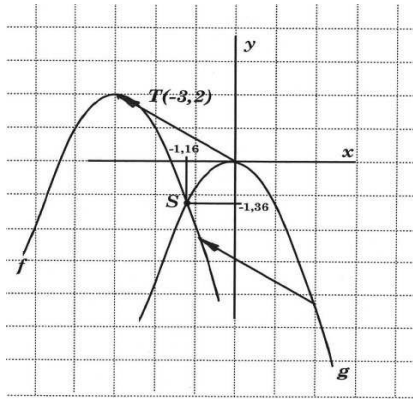


2. Schets de grafiek van de functie  $f: y = -x^2 - 6x - 7$  en bepaal het snijpunt van  $f$  en de parabool  $g: y = -x^2$

Door *kwadraatsplitsing* herleid je eerst de gegeven functie  $f: y = -x^2 - 6x - 7$  tot:

$$f: (-x^2 - 6x - 9) + 2 = -(x + 3)^2 + 2.$$

Volgens de translatietransformatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie  $g: y = -x^2$  door de **translatie**  $T(-3, 2) = T(a, b)$ .



De **top** van (berg) parabool  $f$  is dan het punt  $(-3, 2)$  de **as** is de lijn met  $x = -3$ .

Het **snijpunt**  $S(x, y)$  van de grafieken  $f$  en  $g$  volgt uit:

$$y = -x^2 - 6x - 7 \wedge y = -x^2 \text{ dus uit } -6x - 7 = 0 \text{ zodat}$$

$$x = -\frac{7}{6} \approx -1,16 \text{ en } y = -x^2 = -\left(-\frac{7}{6}\right)^2 - 6 \cdot -\frac{7}{6} - 7 \\ = -\frac{49}{36} \approx -1,36$$

Het gevraagde snijpunt is dan  $S(-1, 16, -1, 36)$ .

3. Schets de grafiek van de functie  $f: y = (x - 3)^5 - 50$  en bepaal de coördinaten van de snijpunten van  $f$  met de lijn  $l: y = 25x$ .

De grafiek van de functie  $f: y = (x - 3)^5 - 50$  ontstaat uit  $f: y = x^5$  door de **translatie**  $T(3, -50)$ .

De snijpunten van de lijn  $l: y = 25x$  met de grafiek van  $f$  bereken je in het  $x' O' y'$ -stelsel omdat daarin geldt  $f': y' = (x')^5$  en  $l': y' = \frac{50}{2} x' = 25x'$ , want  $l' \parallel l$  gaat door  $O$ .

Voor de snijpunten van  $l'$  en  $f'$  geldt dan  $(x')^5 = 25x'$  dus  $x' = 0 \vee (x')^4 = 25 \Rightarrow x' = \pm \sqrt[4]{25} = \pm \sqrt{5}$   
 Uit  $y' = 25x'$  volgt dan  $y' = 0 \vee y' \approx \pm 25 \cdot \sqrt{5}$

De snijpunten van  $f': y = (x - 3)^5 - 50$  en  $l: y = 25x$  zijn  $S_1', S_2'$  en  $S_3'$  (witte stippen in de figuur), met:

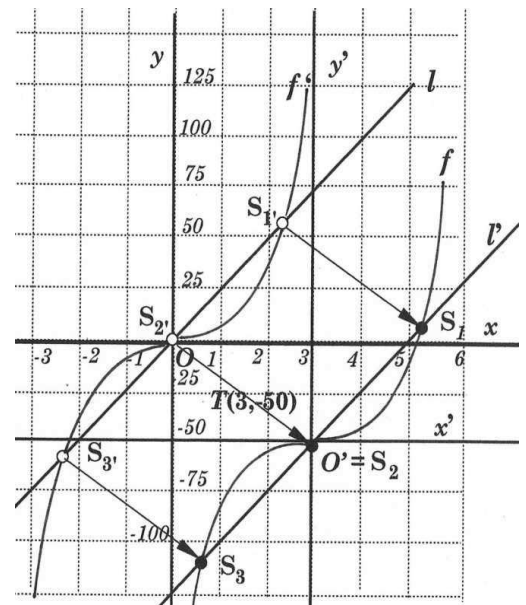
$$S_1' = (\sqrt{5}, 25\sqrt{5}); S_2' = (0, 0); S_3' = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5})$$

De gevraagde snijpunten  $S_1, S_2$  en  $S_3$  (zwarte stippen in de figuur), van  $l'$  en  $f$  zijn dan:

$$S_1 = (\sqrt{5}, 25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (\sqrt{5} + 3, 25\sqrt{5} - 50)$$

$$S_2 = (0, 0) + T(3, -50) = (3, -50)$$

$$S_3 = (-\sqrt{5}, -25\sqrt{5}) + T(3, -50) = (3 - \sqrt{5}, -25\sqrt{5} - 50)$$



**NB:** Hiermee zijn de snijpunten van  $f: y = (x - 3)^5 - 50$  en  $l: y = 25x$  exact bepaald, via de translatietransformatie  $T(3, -50)$ , waarmee de *vijfdegraadsvergelijking*:  $(x - 3)^5 - 25x = 50$  **exact** is opgelost. De betekenis van transformaties van functies blijkt duidelijk uit dit voorbeeld.

## Transformaties door vermenigvuldiging

We gaan nu uit van de transformaties van figuren door vermenigvuldiging.

We kennen daarbij:

a - vermenigvuldiging ten opzichte van een punt

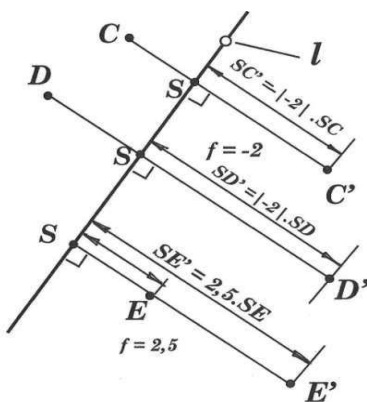
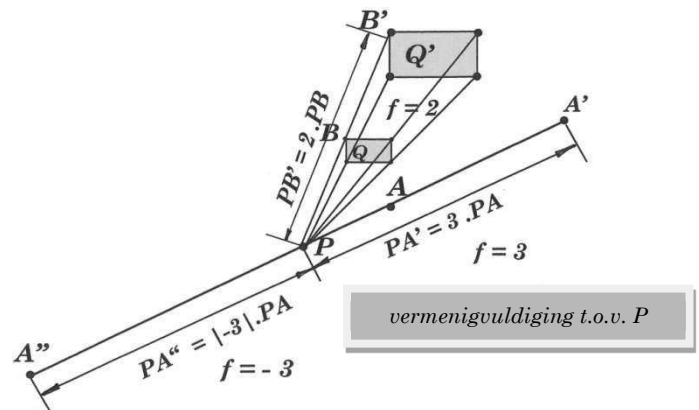
b - vermenigvuldiging ten opzichte van een lijn

**a.** Gedefinieerd is het *product* van een punt  $A$  **ten opzichte van een punt  $P$**  en een **factor  $f$**  als volgt: Bij een *positieve factor  $f$* , ligt het beeld punt  $A'$  op de lijn  $PA$ , waarbij geldt dat

$PA' = f \times PA$ . In de figuur is het beeld  $A'$  getekend van  $3 \times PA$

Zo is ook de rechthoek  $Q'$  het beeld van  $Q$  bij vermenigvuldiging t.o.v.  $P$  met de **factor  $f = +2$**

Bij een *negatieve factor  $f$*  ligt het beeldpunt  $A''$  van punt  $A$  op de lijn  $AP$  **aan de andere kant van  $P$**  als  $A$  en wel zo dat  $PA'' = |f| \times PA$ , hier  $PA'' = |-3| \times PA$



**b.** Bij vermenigvuldiging van een punt  $E$  ten opzichte van een lijn  $l$  met een *positieve factor  $f$*  ontstaat het beeldpunt  $E'$  door vanuit  $E$  een loodlijn op  $l$  neer te laten en vanuit het voetpunt  $S$  van die loodlijn een afstand  $SE'$  zo af te passen, dat  $SE' = f \times SE$ , in de figuur is  $f = 2,5$  dus  $SE' = 2,5 \times SE$

Bij een *negatieve factor  $f$*  ligt hier het beeldpunt  $D'$  van punt  $D$  op de lijn  $DS$  **aan de andere kant van  $S$  als  $D$** , en wel zo dat  $SD' = |f| \times SD$ , dus in de figuur met  $f = -2$ :  $SD' = |-2| \times SD$ . Zo is ook  $C'$  het beeldpunt van  $C$  bij vermenigvuldiging van  $C$  t.o.v.  $l$  met de factor  $f = -2$ , zodat  $SC' = |-2| \times SC$

### Toepassing:

Teken de grafiek van de functie  $g: y = 2x^2 - 4x + 6$ .

Omdat de *coëfficiënt van  $x^2 \neq 1$*  heeft  $g$  niet de vorm van de *standaardparabool  $y = x^2$*  zoals alle grafieken van de functies  $y = 1x^2 + bx + c$ . Met alleen de *translatietransformatie* kan je deze opgave dus niet oplossen. Ga daarom als volgt te werk:

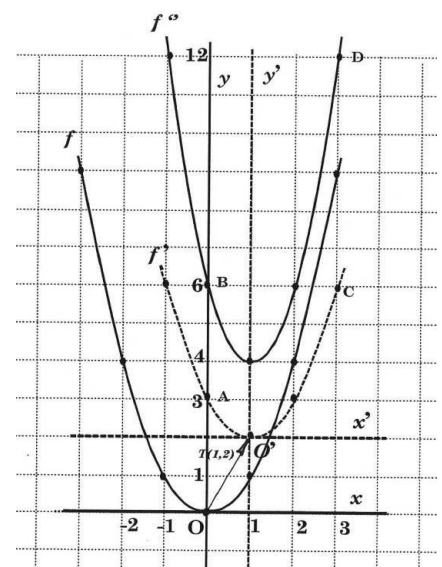
1<sup>o</sup> Pas kwadraatafsplitsing toe, dus schrijf:  $g: y = 2x^2 - 4x + 6$

$\Rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = 2(x - 1)^2 + 4$

2<sup>o</sup> Pas de **translatie**  $T(1,2)$  toe op de punten van de standaardgrafiek  $f: y = x^2$  zodat het beeld ontstaat van de grafiek  $f' = (x - 1)^2 + 2$  (volgens de *translatietransformatie-regel blz.12*).

3<sup>o</sup> *Vermenigvuldig* dit beeld  $f'$  ten opzichte van de  $x$ -as met  $+2$  (*notatie  $P(x-as, 2)$* ).

Dit geeft:  $f'': y = 2 \cdot (x - 1)^2 + 4 = 2x^2 - 4x + 6$ , de gevraagde parabool  $g$ , want uit de definitie van vermenigvuldiging t.o.v. de  $x$ -as) volgt direct de eigenschap:



### ONTHOUD:

Bij de vermenigvuldiging  $P(x-as, a)$  gaat een functie  $y = f(x)$  over in  $y = a \cdot f(x)$

## - Transformaties van wortelvormen

Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de  $x$ -as, afgeleid worden uit hun standaardvorm  $y = \sqrt{x} = x^{0,5}$

### Voorbeelden:

a. Schets de grafieken van de functies

$f: y = \sqrt{x-3} - 2$  en  $g: y = -3\sqrt{x+3}$

b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk.

c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

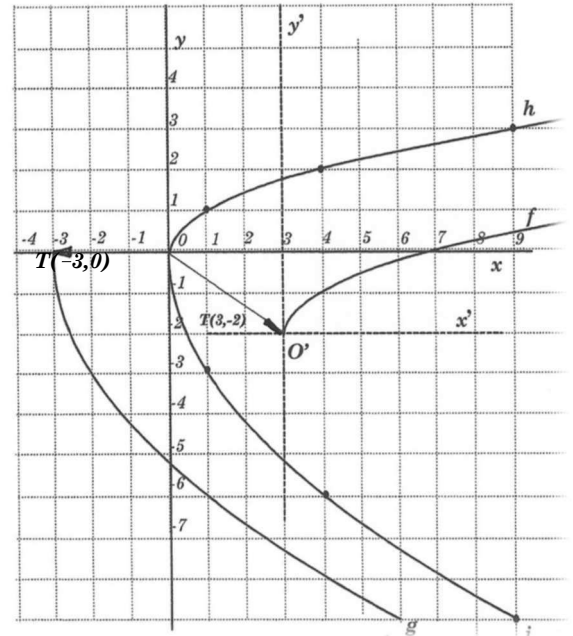
a. Teken de standaardgrafiek  $h: y = \sqrt{x}$ .

Deze heeft als startpunt het punt  $(0,0)$  en gaat verder door de roosterpunten  $(1,1)$ ,  $(4,2)$ ,  $(9,3)$ ,...

- Pas nu op  $h$  de translatie  $T(3,-2)$  toe dan ontstaat volgens de translatietransformatie-regel de gevraagde grafiek  $f: y = \sqrt{x-3} - 2$

- Uitgaande van de standaardgrafiek  $h: y = \sqrt{x}$  vermenigvuldig je deze t.o.v. de  $x$ -as met de factor  $-3$ , waaruit de grafiek  $i: y = -3\sqrt{x}$  ontstaat.

Pas hierop de translatie  $T(0,-3)$  toe, dan vind je de grafiek van  $g: y = -3\sqrt{x+3}$  welke werd gevraagd.



b. In de figuur zie je direct dat het *beginpunt* van  $f: y = \sqrt{x-3} - 2$  het *beeldpunt*  $O'(3,-2)$  is van het origineel  $(0,0)$  van  $h: y = \sqrt{x}$  bij de translatie  $T(3,-2)$ .

Zo is het beeldpunt  $(-3,0)$  het *beginpunt* van  $g: y = -3\sqrt{x+3}$ .

c. De linkergrens van het *domein* van de **standaardgrafiek**  $h: y = \sqrt{x}$  is  $x = 0$  in het punt  $O(0,0)$ , de rechtergrens is  $\infty$ , dus  $D_h = [0, \rightarrow)$ . De linkergrens van het *bereik* van  $h$  is de waarde  $y = 0$ , de rechtergrens is  $y = +\infty$  dus  $B_h = [0, \rightarrow)$ . Daaruit volgt dan:

De linkergrens van het *domein* van  $f$  is  $x = 3$  de rechtergrens is  $x = +\infty$ , dus  $D_f = [3, \rightarrow)$ ,

linkergrens van het *bereik* van  $f$  is  $y = -2$  de rechtergrens is  $y = +\infty$ , dus  $B_f = [-2, \rightarrow)$ .

De linkergrens van het *domein* van  $g$  is  $x = -3$ , de rechtergrens is  $x = +\infty$ , dus  $D_g = [-3, \rightarrow)$ ,

linkergrens van het *bereik* van  $g$  is  $y = 0$ , de rechtergrens is  $y = -\infty$ , dus  $B_g = \langle \leftarrow, 0]$ .

**NB:** Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar te 'plotten' in de GR. Als voorbeeld de functie  $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$ :

- Voer in  $y = -2 + \sqrt{7-2x}$  en kies via [WINDOW]  $X_{min} = -4$ ;  $X_{max} = 4$ ;  $Y_{min} = -2$ ;  $Y_{max} = 2$ . Andere waarden in WINDOW 1 laten, en in TBLSET TblStart en  $\Delta$  Tbl op 1 instellen.

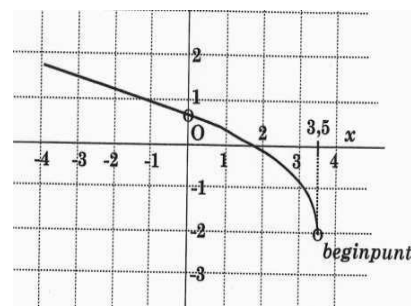
De **tabel** [TABLE] van de grafiek geeft *vanaf*  $X = 4$  'ERROR' omdat daarvoor dan  $\sqrt{7-2x} = \sqrt{-1}$  niet bestaat.

Verander je via [TBLSET]  $\Delta$  Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf*  $X = 3,6$ .

Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek, vindt de GR niet omdat de 'trace-cursor' met een vaste stapgrootte werkt.

Zo'n beginpunt moet dan handmatig worden bepaald:  $7 - 2x \geq 0$ , dus  $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3,5$ , dus is van het **startpunt**  $x = 3,5$  waarbij dan  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x} = -2$ .

**Beginpunt van f:**  $y = -2 + \sqrt{7 - 2x}$  is dus het punt  $S(3,5; -2)$ . Het domein van de functie is  $\langle \leftarrow; 3,5 \right]$ , het bereik is dan  $[-2, \rightarrow)$ .



Verdere punten van de grafiek volgen uit de tabel hieronder:

| $x$ | 3,5   | 3     | 2     | 1    | 0    | -1   | -2   | -3   | -4   |
|-----|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| $y$ | -2,00 | -1,00 | -0,27 | 0,24 | 0,65 | 1,00 | 1,32 | 1,61 | 1,87 |

## Exponentiële functies

Naast de machtsfunctie  $f(x) = x^a$  met **vaste exponent**  $a$  en **variabel grondtal**  $x$ , bestaat 'omgekeerd' een **exponentiële functie**  $f(x) = a^x$  met **vast grondtal**  $a$  en **variabele exponent**  $x$ .

Voor  $a \leq 0$  is de functie *niet gedefinieerd*.

Immers als  $a = 0$  dan is  $a^x = 0$  voor elke  $x \neq 0$  dus is  $a^x$  geen functie.

Als  $a < 0$  dan bestaat  $a^x$  niet voor elke waarde van  $x$ .

Zo zijn:  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ;  $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$ ;  $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ; ... ongedefinieerd als  $a$  negatief is.

Bij elke exponent  $x$ , is de waarde van  $a^x$  ( $a > 0$ ) steeds positief want:

- als  $x > 0$  dan  $a^x > 0$  omdat per definitie  $a^x = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $x$ - keer) dus weer positief.

- als  $x < 0$  dan  $a^x = 1 / a^{-x}$  dus zeker positief omdat  $a^{-x}$  dan positief is.

Alle grafieken van  $y = f(x) = a^x$  liggen dus in het eerste en tweede kwadrant.

Omdat  $a^0 = 1$  voor iedere  $a$  gaan alle grafieken door het punt  $(0,1)$ .

Beschouw nu de functie  $f(x) = a^x$  voor waarden van  $a$ , met  $0 < a < 1$  en die als  $a > 1$ .

### 1. $f(x) = a^x \wedge 0 < a < 1$

Voor  $0 < a < 1$  is de functie **monotoon dalend**, dus bij

toenemende  $x$  neemt  $y$  af. Immers als  $f(x) = a^x$  dan is

$f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$  en daar  $a < 1$  is  $a \cdot a^x < a^x$  dus

$a^{x+1} < a^x$  zodat  $f(x) = a^x$  **monotoon daalt**.

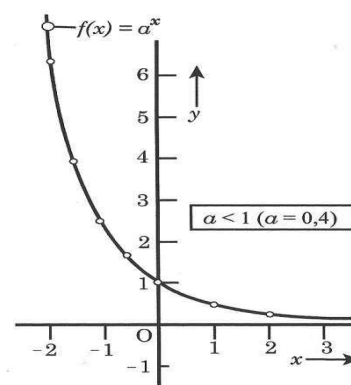
Bij onbepaald grote toename van  $x$ , dus als  $x$  tot oneindig

nadert, notatie  $x \rightarrow \infty$ , dan daalt  $a^x$  onbepaald dicht tot nul

omdat  $0 < a < 1$ . De waarde nul wordt nooit bereikt, want er

bestaat geen reële  $x$  waarvoor  $a^x$  ( $a \neq 0$ ) gelijk is aan nul, zodat

bij toenemende  $x$  de grafiek steeds dichtter tot de **positieve x-as** (rechts van  $O$ ) nadert zonder hem ooit te raken:

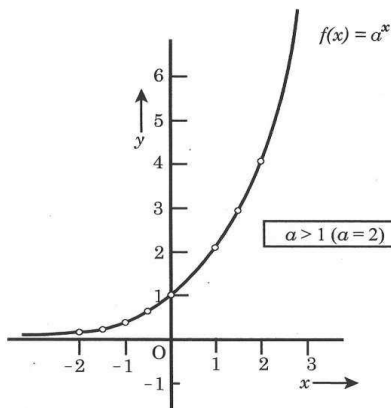


Functies waarvan de exponent  $x$  de variabele is en een positief grondtal een constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking:  $y = f(x) = a^x$  ( $a > 0$  en  $a \neq 1$ )

De  $x$ -as heet dan een (horizontale) '**asymptoot**' van de grafiek van  $f(x) = a^x$ . ( $0 < a < 1$ )

## 2. $f(x) = a^x \wedge a > 1$

Als  $a > 1$  dan is de functie **monotoon stijgend**, want: als  $f(x) = a^x$  dan is  $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x$



en daar  $a > 1$  is dan  $a \cdot a^x > a^x$  dus  $a^{x+1} > a^x$

$\Rightarrow f(x) = a^x$  is dan **monotoon stijgend**.

Bij **afname van de waarde van  $x$**  wordt de waarde van  $a^x$  steeds kleiner want  $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$  omdat  $a > 1$ .

Bij **onbepaald grote afname** van  $x$ , als  $x$

**tot  $-\infty$  nadert**, dan nadert  $a^x$  onbepaald dicht tot nul.

De waarde nul wordt nooit bereikt, omdat er geen reële  $x$  bestaat met  $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$  dus hier zal bij afnemende  $x$  de grafiek steeds dichtter tot de **negatieve  $x$ -as** naderen:

De  $x$ -as is dus ook hier een **horizontale asymptoot**.

### - Exponentiële groei

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns- Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en 1970.

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:

$$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1,11.$$

| jaar                 | 1950 | 1954 | 1958 | 1962 | 1966 | 1970 |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|
| aantal $\times 10^6$ | 164  | 183  | 203  | 227  | 254  | 282  |

De factor 1,11 heet in zo'n geval de **groefactor**. Het **groepercentage** is dan 11%.

Werk je met de groefactor de bevolkingsaantallen in de onderste rij uit, dan vind je:

| aantal $\times 10^6$ | 164                 | 183<br>= 1,11 $\times$<br>164 | 203<br>= 1,11<br>$\times$ 1,11 $\times$<br>164 | 227<br>= 1,11<br>$\times$ 1,11<br>$\times$ 1,11 $\times$<br>164 | 254<br>= 1,11<br>$\times$ 1,11<br>$\times$ 1,11<br>$\times$ 1,11 $\times$<br>164 | 282<br>= 1,11<br>$\times$ 1,11<br>$\times$ ...<br>$\times$ ...<br>164 |
|----------------------|---------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
|                      | $1,11^0 \times 164$ | $1,11^1 \times 164$           | $1,11^2 \times 164$                            | $1,11^3 \times 164$                                             | $1,11^4 \times 164$                                                              | $1,11^5 \times 164$                                                   |

Je ziet dan dat bij de groefactor 1,11 na  $t$  perioden van 4 jaar ( $t = 0, 1, 2, 3, 4$ ) de **beginwaarde** 164 (dus het inwonertal na  $t = 0$  perioden) met een factor  $1,11^1, 1,11^2, 1,11^3, 1,11^4, 1,11^5$  is toegenomen.  $t$  perioden. Na de startwaarde 160 is die waarde in  $t$  perioden dus toegenomen tot  **$1,11^t \times 164$** . Deze toename wordt **exponentiële groei** genoemd.

Noem je de **startwaarde**  $164 = N(0)$  en de groefactor per periode  $1,11 = g$  dan is na  $t$  perioden:  **$N(t) = N(0) \cdot g^t$** .  $N(t)$  is dus een **exponentiële functie van  $t$** , dus algemeen:

ONTHOUD:

Bij exponentiële groei waarbij de groefactor  $g$  constant is,  
is na  $t$  perioden:  **$N(t) = N(0) \cdot g^t$**  ( $N(0) = \text{startwaarde}$ )

### Toepassingen:

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe.

Bereken:

- De groeifactor per kwartier
- De groeifactor en het groeipercentage per uur
- Het groeipercentage per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot  $1,12 \times$  de startwaarde (= 1).

De groeifactor per kwartier is dan  $1,12 : 1 = 1,12$ .

b. De groeifactor per uur ( $4 \times 1$  kwartier) is  $1,12^4 = 1,574$ ; het groeipercentage is **57,4%**

c. De groeifactor in vijf minuten (=  $1/3$  kwartier) is  $1,12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,12} \approx 1,0385$   
 dus het groeipercentage per vijf minuten is  $\approx 3,85\%$

2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.

Op  $t = 4$  zijn er 50.000 bacteriën, op  $t = 8$  zijn er 130.000 bacteriën als  $t$  de tijd is in uren.

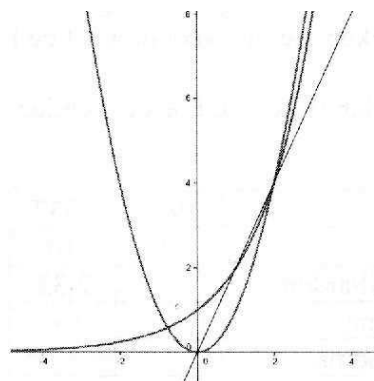
Bereken groeifactor en groeipercentage per uur en de groeifactor per dag.

$$N(8) = N(0) \cdot g^8, \quad N(4) = N(0) \cdot g^4 \Rightarrow \frac{N(8)}{N(4)} = \frac{N(0) \cdot g^8}{N(0) \cdot g^4} \Rightarrow \frac{130.000}{50.000} = g^4 = 2,6$$

De groeifactor  $g$  is in vier uur is dan 2,6, dus per uur  $(2,6)^{\frac{1}{4}} = (1,2698.....)$

Het groeipercentage per uur is  $\approx 1,27\%$

Per dag is de groeifactor  $(1,2698.....)^{24} \approx 308,916$ .



3. In deze figuur zijn de grafieken weergegeven van de functies:  $y = 2x$ ,  $y = x^2$  en  $y = 2^x$ .

Onderzoek de verandering van elke grafiek voor  $-4 \leq x \leq 4$  Neem steeds als stapgrootte 1.

Hieronder zie je de x, y tabel van elk.

|           |          |          |          |          |         |         |         |         |         |
|-----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $y = 2x$  | $x = -4$ | $x = -3$ | $x = -2$ | $x = -1$ | $x = 0$ | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ | $x = 4$ |
| $y =$     | -8       | -6       | -4       | -2       | 0       | 2       | 4       | 6       | 8       |
| $y = x^2$ | $x = -4$ | $x = -3$ | $x = -2$ | $x = -1$ | $x = 0$ | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ | $x = 4$ |
| $y =$     | 16       | 9        | 4        | 1        | 0       | 1       | 4       | 9       | 16      |
| $y = 2^x$ | $x = -4$ | $x = -3$ | $x = -2$ | $x = -1$ | $x = 0$ | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ | $x = 4$ |
| $y =$     | 1/16     | 1/27     | 1/4      | 1/2      | 1       | 2       | 4       | 8       | 16      |

$y = 2x$  is een **lineair** verband; de verandering is constant:  $\Delta y / \Delta x = 2$

$y = x^2$  is een **kwadratisch** verband; de veranderingen  $\Delta y$  verlopen parabolisch.

$y = 2^x$  is een **exponentieel** verband:  $\Delta y$  wordt vanaf  $x = -2$  steeds  $2 \times$  zo groot.

Omdat de functiewaarden van  $f = 2x$ ,  $x^2$  en  $y = 2^x$  bij toenemende  $x$  steeds toenemen, zijn de functies voorbeelden van '**Groeivormen**'

## 6. Gebroken rationale functies

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$   
waarin  $g(x)$  en  $h(x)$  polynomen zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen.

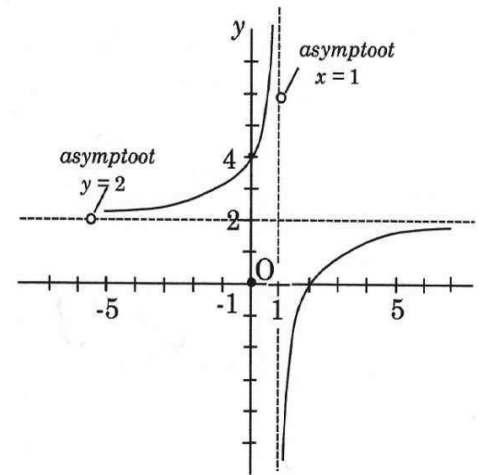
Hiervan een voorbeeld:  $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met  $x = 1$ , omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is.

De functie heet dan **discontinu** in het punt met  $x = 1$ .

Verder volgt uit  $x = 0 \Rightarrow y = 4$  en uit  $y = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$

dus  $x = 2$  dus de grafiek snijdt de  $x$ -as in  $(2,0)$  en de  $y$ -as in  $(0,4)$ .



Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je na *kegelsneden* zult herkennen als de *twee takken van een gelijkzijdige hyperbool*.

Je ziet dat *bij toenemende*  $|x|$  (dus  $x$  naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn*  $y = 2$  hetgeen als volgt is te bewijzen:

Deel je teller en noemer van  $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$  door  $x$ , dan ontstaat  $f(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x-4)}{\frac{1}{x}(x-1)} = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$  ... (1)

Als  $x$  in (1) tot **oneindig nadert**, dan naderen  $\frac{4}{x}$  en  $\frac{1}{x}$  tot nul zodat (1) overgaat in

$f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$ . In wiskundige termen:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x-1} = 2$ . (Zie vervolg in 7 hierna)

De lijn  $y = 2$  heet nu een **horizontale asymptoot** van de functie  $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

Zo is ook aan te tonen dat *bij toenemende*  $|y|$  beide takken *naderen tot de lijn*  $x = 1$ .

De functie heeft dus ook een **verticale asymptoot**  $x = 1$ . (Gr. 'symptootos' = samenvallend).

## 7. Asymptoten

Een *asymptoot van een functie* is in het algemeen een lijn  $y = ax + b$  waartoe de kromme  $y = f(x)$  steeds dichter nadert, **zonder hem ooit te raken**. We onderscheiden **horizontale, verticale en scheve asymptoten**. Hoe dichter  $x$  en of  $y$  tot *oneindig naderen*, hoe dichter de (grafiek van)  $y = f(x)$  tot de lijn  $y = ax + b$  nadert.

In het geval hierboven zijn dus de *horizontale lijn*  $y = 2$  en de *verticale lijn*  $x = 1$

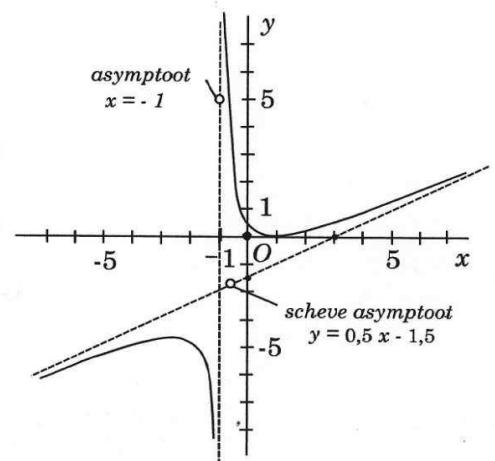
respectievelijk een horizontale en verticale asymptoot van de functie  $y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ .

In de volgende opgave bespreken we de **scheve asymptoot**.

1.  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$

Omdat de noemer van de breuk bij  $x = -1$  de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt *niet gedefinieerd*.

Je ziet dan ook dat de grafiek van bij  $x = -1$  zowel naar een *oneindig grote waarde* ( $+\infty$ ) als naar een oneindig kleine waarde ( $-\infty$ ) gaat.  $F(x)$  **bestaat dus niet** in  $x = -1$ . De functie heet daarom **discontinu** in  $x = -1$ .



Het *snijpunt met de y-as* is het punt met  $x = 0$

en  $y = \frac{0,5(0-1)^2}{0+1} = 0,5$  dus is het punt **(0; 0,5)**.

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met

$y = 0$ , dus als  $\frac{0,5(x-1)^2}{x+1} = 0$  ofwel:

$0,5(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$  (dubbeltellend)

twee *samenvallende punten*  **$x = 1$** .

Punt (1, 0) is dan **raakpunt** van  $f(x)$  aan de  $x$ -as.

10. De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met  $x = -1$ .

Bewijs:

Als  **$x$  van links nadert tot  $-1$**  dan nadert de *noemer* van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot 0 waarbij

de waarde van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot  $-\infty$  nadert.

$x = -1$  is dus een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.

20. Ook van de rechtertak is de lijn  $x = 1$  een asymptoot want als  **$x$  van rechts**

**nadert tot  $-1$**  dan nadert de noemer van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  tot 0 dus tot 0. \*)

De waarde van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  nadert dan **van rechts** tot  $+\infty$  dus  $x = -1$  is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.

- Omdat een eventuele limiet van  $f(x) = \frac{0,5(x-1)^2}{x+1}$  als  **$x$  tot plus of min oneindig nadert** niet direct is te berekenen, herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$\begin{array}{r} x + 1 \overline{) 0,5x^2 - x + 0,5} \\ \underline{0,5x^2 + 0,5x} \phantom{+ 0,5} \\ -1,5x + 0,5 \\ \underline{-1,5x - 1,5} \\ 2 \end{array}$$

dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:

$$y = 0,5x - 1,5 + \frac{2}{x+1}.$$

De limiet hiervan als  $x$  tot  $\pm\infty$  nadert is dan  $y = 0,5x - 1,5$  omdat  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0$ .

De lijn met vergelijking  **$y = 0,5x - 1,5$**  heet dan een **scheve asymptoot** van de gegeven functie. De richting is immers niet horizontaal en niet verticaal.

\* Het getal  $\delta$  wordt in de wiskunde vaak gebruikt om een kleine, tot nul naderende, positieve waarde, aan te geven. .

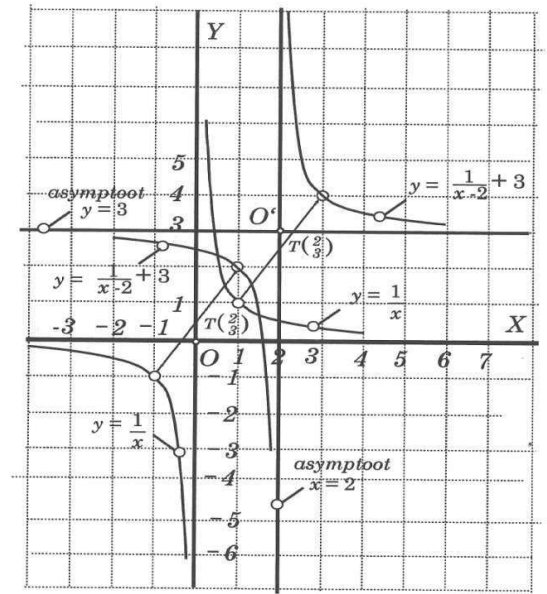
2.  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

De grafiek van deze gebroken rationale functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie  $T(2, 3)$  toe te passen op de standaardhyperbool  $g: y = \frac{1}{x}$  volgens de *translatietransformatie-regel*.

Horizontale asymptoot van  $g: y = \frac{1}{x}$  is de  $x$ -as met vergelijking  $y = 0$ , verticale asymptoot is de  $y$ -as met vergelijking  $x = 0$ .

Bij de translatie  $T(2, 3)$  gaat de oorsprong  $O$  over in  $O'$  dus de vergelijking  $y = 0$  over in  $y = 0 + 3 = 3$  en de vergelijking  $x = 0$  in  $x = 0 + 2 = 2$

Van  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$  is de lijn  $y = 3$  dan *horizontale asymptoot* en  $x = 2$  de *verticale asymptoot*.



### Oefenopgaven uit de examenbundel vwo-wiskunde B 2022/ 2023

Bereken algebraïsch (dus zonder gebruikmaken van de grafische rekenmachine) de oplossing van onderstaande vergelijkingen en controleer je antwoorden.

1.  $x + \sqrt{x+8} = 4$

Oplossing:  $\sqrt{x+8} = 4 - x$  dus

$$x + 8 = (4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (x-8) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 8. \text{ Alleen } x = 1 \text{ voldoet.}$$

2.  $x\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = 0$

Oplossing:  $x\sqrt{x+1} = -2\sqrt{x+1}$

Dit is juist als  $x+1 = 0$  dus als  $x = -1$

Als  $x+1 \neq 0$ , dan mag je links en rechts door  $x+1$  delen

en vind je  $x = -2$ .  $1 \Rightarrow x = -2$ . **Alleen  $x = -1$  voldoet**

(want de wortel uit  $-1$  is geen reëel getal)

3.  $\frac{(4x-1) \cdot 3 - 3 - (3x+1) \cdot (2x-1)}{(x+1)^2} = 0$

Oplossing:

Zoek waarden van  $x$  waarvoor de **teller**  $= 0$  en de **noemer**  $\neq 0$  dus

$$\text{los op: } (4x-1) \cdot 3 - 3 - (3x+1) \cdot (2x-1) = 12x - 3 - (6x^2 - x - 1) =$$

$$= -6x^2 + 13x - 2 = 0, \text{ dus opgelost met de abc-formule:}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot (-6) \cdot (-2)}}{-12} = \frac{-13 \pm 11}{-12} = \frac{1}{6} \vee \frac{-24}{-12} = 2$$

Ga na dat beide waarden voldoen.

## 8. Logaritmische functies

### a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen zoals bij voorbeeld  $17^x = 500$  kan je nu nog niet algebraïsch oplossen. Men heeft daarom de *logaritme van een getal* ingevoerd.

De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een **macht van tien** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij **logaritmen**, dus de *logaritme* van een getal  $a$  is de **exponent  $p$**  waarbij  $10^p = a$ .

Definitie:  **$\log a = p$  als  $10^p = a$ .**

Zo is bijvoorbeeld  $100 = 10^2$  dus de *logaritme* van  $100 = 2$ . Notatie:  $\log 100 = 2$ .

$1000 = 10^3$  dus  $\log 1000 = 3$ ;  $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$ ;  $0,001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0,001 = -3$

De logaritmen van getallen  $a$  met  $a \leq 0$  **bestaan niet** want er is *geen getal  $p$*  waarvoor  $10^p = a$  als  $a \leq 0$ . (Immers: Elke positieve of negatieve macht van 10 is groter dan 0)

Briggs berekende de logaritmen van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de **Briggse logaritmen**, met als **grondtal** het getal 10 <sup>\*)</sup>

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal  $g$*  voor logaritmen dienen, maar in feite **elk positief reëel getal mits  $\neq 1$** .

Omdat bijvoorbeeld  $9 = 3^2$  kan men met als **grondtal 3** zeggen  ${}^3\log 9 = 2$ .

Zo is  ${}^5\log 125 = 3$  omdat  $5^3 = 125$ ;  ${}^{1/3}\log \frac{1}{27} = 3$ , want  $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$ , etc.

Men definieert dan:  **${}^g\log a = x$  als  $g^x = a$**  *waarin  $g$  ( $g > 0$ ) het grondtal heet van die* *logaritme.* Omdat  $g > 0$  is dan ook  $a > 0$  dus **als  $a \leq 0$  dan bestaat  ${}^g\log a$  niet.**

Definitie:

De  ${}^g\log$  *logaritme van een getal  $a$*  is gedefinieerd door:  **${}^g\log a = x$  als  $g^x = a$**  ( $a$  en  $g > 0$ ,  $g \neq 1$ )

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later voor *het grondtal  $g$*  van de logaritmen het '**Getal van Euler**' =  **$e$**  in. ( $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,718281828\dots$ )

Logaritmen met dit grondtal noemt men **natuurlijke logaritmen** omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel *natuurprocessen*.

Notatie voor logaritmen met grondtal  $e$  is  **$\ln x$** , dus  **$\ln x = {}^e\log x$** .

ONTHOUD:

*$\log x$  is de Briggse *logaritme van  $x$  met 10 als grondtal*, dus  $\log x = {}^{10}\log x$ ,  
 $\ln(x)$  is de *natuurlijke *logaritme van  $x$  met  $e$  als grondtal* dus  $\ln x = {}^e\log x$ .  
Als  $\log x = p$ , dan is  $10^p = x$ , als  $\ln x = p$  dan is  $e^p = x$ .  
In het algemeen: Als  ${}^g\log x = p$  dan is  $g^p = x$**

<sup>\*)</sup> Zo berekende Briggs handmatig 27 wortels uit 10: De wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in zestien decimalen nauwkeurig! Omdat  $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,16227766\dots$ , is  $\log 3,16227766\dots = 0,5$ ;  $\sqrt{3,16227766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1,77827941\dots$  dus  $\log 1,77827941\dots = 0,25$  en zo verder. En dat was nog maar een begin...

## b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal  $g$  ( $g \neq 1$ ) en alle positieve waarden voor  $a$  en  $b$  gelden de regels:

|          |                                 |                                               |
|----------|---------------------------------|-----------------------------------------------|
| ONTHOUD: | 1. ${}_g \log ab$               | $= {}_g \log a + {}_g \log b$                 |
|          | 2. ${}_g \log \frac{a}{b}$      | $= {}_g \log a - {}_g \log b$                 |
|          | 3. ${}_g \log(a^n)$             | $= n \cdot {}_g \log a$                       |
|          | 4 <sup>a</sup> ${}_g \log(g^x)$ | $= x$ en 4 <sup>b</sup> $g^{{}_g \log x} = x$ |

Bewijs:

- Noem  ${}_g \log a = p$  en  ${}_g \log b = q$  dan is per definitie  $g^p = a$  en  $g^q = b$  met gevolg:  
 $ab = g^p \cdot g^q = g^{p+q}$ , zodat  ${}_g \log ab = p + q$  dus:  ${}_g \log ab = {}_g \log a + {}_g \log b$ .
- Noem  ${}_g \log a = p$  en  ${}_g \log b = q$  dan is  $g^p = a$ ,  $g^q = b$  dus  $\frac{a}{b} = \frac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$  zodat  
 ${}_g \log \frac{a}{b} = p - q \Rightarrow {}_g \log \frac{a}{b} = {}_g \log a - {}_g \log b$ .
- Als  ${}_g \log a = p$  dan  $g^p = a$  en  $a^n = (g^p)^n = g^{n \cdot p} \Rightarrow {}_g \log(a^n) = n \cdot p = n \cdot {}_g \log a$  dus  
 ${}_g \log(a^n) = n \cdot {}_g \log a$
- 4<sup>a</sup>  ${}_g \log(g^x) = x \cdot {}_g \log g$  (volgens 3)  $= x \cdot 1 = x$  (want  ${}_g \log g = 1$  omdat  $g^1 = g$ )  $\Rightarrow$   
 ${}_g \log(g^x) = x$ .
- 4<sup>b</sup> Noem  ${}_g \log x = p$  dan  $g^p = x$  zodat  $g^{g \log x} = g^p = x \Rightarrow g^{g \log x} = x$

## c. Inverse functies

Het origineel  $x$  van een functie  $f(x)$  kan zelf een functie  $g(x)$  van  $x$  zijn. In dat geval is dus  $f(x) = f(g(x))$ .

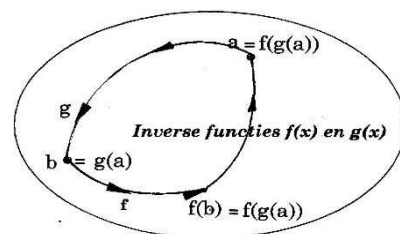
Punt  $a$  wordt in de figuur door een functie  $g$  afgebeeld op punt  $b$ , dus  $b = g(a)$ . Stel nu dat door een functie  $f$  het beeld  $b = g(a)$  weer terug wordt afgebeeld op punt  $a$  dan is  $f(b) = a$  ofwel  $f(g(a)) = a$ .

In feite is het origineel  $a$  na een rondreisje weer op zichzelf teruggeworpen.

Als je het goed snapt en je keert alle pijlen even om, dan zie je dat punt  $a$  nu via het reisje  $g(f(b))$  weer terugkomt in  $a$ .

Je mag dan zeggen:  $f(g(a)) = g(f(a)) = a$  of kortweg  $f g(a) = g f(a) = a$

Als deze eigenschap geldt voor **alle elementen binnen het domein** van de functies  $f$  en  $g$  dan heten  $f$  en  $g$  elkaars **inverse functie**. Dus:



Zijn  $f$  en  $g$  twee functies waarbij voor elk element binnen hun gemeenschappelijk domein geldt:  $f g(x) = g f(x) = x$ , dan heten  $f$  en  $g$  elkaars inverse functie

Zo zijn machtsverheffen  $f(x) = x^p$  en worteltrekken  $g(x) = \sqrt[p]{x}$  elkaars inverse functies, want voor elk getal  $x$  is  $f(g(x)) = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^p = x$  en  $g(f(x)) = g(x^p) = \sqrt[p]{x^p} = x$ .

Algemeen geldt dan ook: Als  $f$  en  $g$  elkaars inverse functie zijn, dan geldt ook steeds:

als  $f(a) = b$  dan is  $g(b) = a$ , dus hier bijvoorbeeld: Omdat  $2^3 = 8$  is  $\sqrt[3]{8} = 2$

Eigenschap: De logaritmische functie  $f(x) = {}_g \log x$  en de exponentiële functie  $g(x) = g^x$  zijn elkaars inverse functie

**Bewijs:**

Noem  $f(x) = {}^g \log x$  en  $g(x) = g^x$  dan is:  $f(g(x)) = f(g^x) = {}^g \log (g^x) = x$  (eig. 4<sup>a</sup>) ... (1)

Ook is  $g(f(x)) = g({}^g \log x) = g^{{}^g \log x} = x$  (eig. 4<sup>b</sup>) ... (2)

Uit (1) en (2) volgt dan  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  dus zijn

$f(x) = {}^g \log x$  en  $h(x) = g^x$  per definitie elkaars **inverse functies**.

**Algemene eigenschap van inverse functies**

*Twee functies  $f$  en  $g$  waarvan de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn  $y = x$  zijn elkaars inverse functies en omgekeerd.*

**Bewijs:**

Eerder leerde je: Bij spiegeling **in de lijn  $y = x$**  vervang je  $x$  door  $y$  en  $y$  door  $x$ , als bijvoorbeeld:  $2x - 3y = 4$  na spiegeling in  $y = x$  geldt:

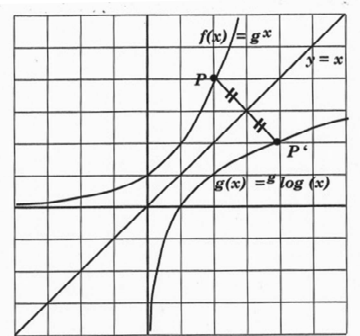
$$2y - 3x = 4$$

Neem  $f: y = e^x$  dan is daarvan het spiegelbeeld in de lijn  $y = x$ :  $g: x = e^y$

Uit  $g: x = e^y$  volgt  $e \log x = y$ , zodat nu de voorwaarde geldt:

$$f(g(x)) = e^{e \log x} = x \text{ en } g(f(x)) = e^{\log e^x} = x, \text{ dus:}$$

**$f$  en  $g$  zijn elkaars inverse functies**



**Voorbeeld (Uit examenopgave vwo-B)**

Toon aan dat  $f(x) = 5 - \frac{6}{x+2}$  en  $g(x) = \frac{2x-4}{5-x}$  elkaars inverse functies zijn:

a. Ga uit van  $y = 5 - \frac{6}{x+2}$  en **verwissel  $x$  en  $y$**

Je ziet dan dat  $x = 5 - \frac{6}{y+2}$  het spiegelbeeld is van  $y = 5 - \frac{6}{x+2}$  in de lijn  $y = x$ .

b. Maak  $y$  vrij in  $x = 5 - \frac{6}{y+2}$

$$\text{Er komt dan } \frac{6}{y+2} = 5 - x \Rightarrow y + 2 = \frac{6}{5-x} \Rightarrow y = \frac{6}{5-x} - 2$$

$$\text{Dus } f^{inv}(x) = \frac{6}{5-x} - 2 = \frac{6}{5-x} - 2 \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{6-10+2x}{5-x} = \frac{2x-4}{5-x} = g(x)$$

Het spiegelbeeld van  $f(x) = 5 - \frac{6}{x+2}$  in de lijn  $y = x$  is dus gelijk aan  $g(x) = \frac{2x-4}{5-x}$ .

Hiermee is aangetoond dat  $f$  en  $g$  elkaars inverse functies zijn.

**Opgaven**

1. Bewijs dat algemeen geldt:  ${}^s \log x = \frac{\log x}{\log s}$ . (eigenschap 5)

Noem  ${}^s \log x = p$  dan is  $x = g^p$ . Noem  $\log x = q$  dan is ook  $x = 10^q$

$$\text{zodat } g^p = 10^q = x \quad \dots (1)$$

Noem  $\log g = r$ , dan  $g = 10^r \Rightarrow x = g^p = (10^r)^p = 10^{rp} = 10^q$  volgens (1)

$$\text{dus } r \cdot p = q \Rightarrow p = \frac{q}{r} \text{ ofwel } {}^s \log x = \frac{\log x}{\log g}$$

**NB:** Dankzij deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal  $g$*  via *Briggse logaritmen* (grondtal = 10) berekend worden met de GR TI-83/84

$$\text{Voorbeelden: } {}^3 \log 17 = \frac{\log 17}{\log 3} \approx 2,5789; {}^{1/3} \log 52 = \frac{\log 52}{\log 1/3} \approx -3,5966$$